УДК 517.929

Устойчивость по Лагранжу

© С. В. Зубов[1]

Аннотация. Основной задачей математической теории автоматического регулирования является установление условий устойчивости по Лагранжу и конструирование систем, при которых траектории системы остаются в заданном множестве.

Ключевые слова: радиус-вектор, траектория, уравнение, координата, окружность, функция

Диссипативность или ограниченность решений совокупных уравнений управляемых систем является самым распространенным требованием, предъявляемым к ним. Изучение ограниченности решений системы совокупных уравнений можно осуществлять несколькими путями. К первому пути относится использование второго метода Ляпунова. Ко второму - изучение устойчивости бесконечно удаленной точки вместо положения равновесия возмущенной системы путем соответствующего преобразования системы.

Вопросами ограниченности решений занимались многие математики, среди которых Йошизава, Рейссиг, Массера и др. [1] Теорема Т. Йошизавы дает необходимые и достаточные условия устойчивости по Лагранжу.

Теорема 1.2. *Для того чтобы система*

$$\dot{X} = F(t, X) \tag{1.1}$$

была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, X)$ *такая, что:*

1) $V(t,x) \geq W(X)$, *где* $W(X) \to \infty$ *при* $\|X\| \to \infty$; *Structure minimization of system observation*

2) $V(t, X)$ *является невозрастающей функцией на решениях* (1.1).

Для достаточно условие 2) может быть заменено следующим: производная функции $V(t, X)$ *в силу системы* (1.1) *неположительна.*

Требования этой теоремы могут быть ослаблены, а именно.

Теорема 3.3. *Для того чтобы система* (1.1) *была устойчива по Лагранжу, достаточно, чтобы существовала функция* $V(t, X)$ *такая, что:*

1) $V(t,x) \geq W(X)$, *где* $W(X) \to \infty$ *при* $\|X\| \to \infty$;

2) производная функции $V(t, X)$ *в силу системы* (1.1) *положительна лишь на компактном, не обязательно связном множестве* M.

Поскольку одной из целей книги является рассмотрение систем с простой структурой, важным следствием этой теоремы будет следующее утверждение. Пусть квадратичные знакопеременные функции [2]

$$\begin{array}{l} V = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \\ W = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} d_i x_i \end{array} \tag{3.2}$$

обладают следующими свойствами: $a_i > 0$, $c_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Пусть на решениях системы

[1] доцент, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г.Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$\dot{X} = F(X) \tag{3.3}$$

выполнено соотношение $\dot{X} = W$ [3].

Т е о р е м а 3.4. *Все решения системы* (3.3) *ограничены.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим функцию

$$V_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + \frac{b_i}{2a_i})^2 = V + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{4a_i},$$

отличающуюся от функции V на положительную константу. Из этого следует, что

$$\dot{V}_1 = \dot{V}.$$

Функция W представима в следующем виде:

$$W = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i + \frac{d_i}{2c_i})^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{2c_i}.$$

Обозначим

$$W_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i + \frac{d_i}{2c_i})^2, \qquad C = -\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{4c_i}.$$

Видно, что $W_1 \geq 0$, $C \geq 0$.
Имеем по условию

$$\dot{V}_1 = W_1 + C, \tag{3.4}$$

откуда и следует доказываемое утверждение.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.
Из доказанной теоремы следует следующая теорема [4].

Т е о р е м а 3.5. *При выполнении условий теоремы 3.4. система* (1.1) *имеет аттрактор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу 3.4 существует эллипсоид $V_1 = R$, удовлетворяющий условиям теоремы 3.5.. Все траектории, начинающиеся вне него, попадают в его внутреннюю часть, пересекая поверхность. Этот эллипсоид включает в себя эллипсоид

$$W_1 = C,$$

что и является определением положительной константы R.
Как мы увидим далее, формы (3.2) характеризуют аттрактор Лоренца, а также дают инструмент построения систем с простой структурой, имеющих компактные глобально устойчивые инвариантные множества. Подобные системы и содержат автоколебания.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. А.В. Зубов, С.В. Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, ВВМ, СПб., 2011, 323 с.

2. А.В. Зубов, Н.В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.

3. А.В. Зубов, О.А. Шабурова, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

4. С.В. Зубов, М.В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб., 2010, 446 с.

The stability on Lagrangh

© S. V. Zubov[2]

Abstract. The basis task of mathematical theory automatic regulation is appears establishment the conditions of stability on Lagrange and construction of systems, by those trajectories of systems is remains in giving multitude.
Key Words: radius-vector, trajectory, equation, coordinate, circle, function

[2] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru