УДК 517.938

О топологической классификации градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений посредством энергетической функции

© **Е. Я. Гуревич**[1], **А. Н. Сахаров**[2], **Е. В. Трегубова**[3]

Аннотация. Работа является продолжением работы [7] и посвящена топологической классификации градиентно-подобных потоков, заданных на гладком замкнутом ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 3$, с использованием энергетической функции. Рассмотрен класс $G(M^n)$ градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $(n-1)$. Показано, что необходимое и достаточное условие топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^n)$ состоит в эквивалентности соответствующих энергетических функций и одновременном выполнении специального условия эквивалентности функций на выделенной поверхности уровня. Выделен класс потоков $G_0(M^n)$, для которых энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Результаты работы могут быть применены для качественного изучения динамики таких структурно-устойчивых динамических систем, для которых энергетическая функция известна из физического контекста модели (например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля, или, при условии пренебрежения электрическими токами, как потенциал магнитного поля).

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, энергетическая функция

1. Введение

Пусть M^n — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие. Дважды дифференцируемая функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невыродены, то есть для любой критической точки $p \in M^n$ определитель матрицы Гессе $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса (см. [10], лемма 2.2), в некоторой окрестности невырожденной критической точки p существуют локальные координаты $y_1, \dots, y_n$ называемые *координатами Морса*, в которых функция φ имеет вид $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$. Число $k \in [0, n]$ не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки* p. Будем обозначать индекс критической точки через $ind(p)$.

Гладкий поток, индуцированный векторным полем $X = -grad\ \varphi$, называется *градиентным потоком.* Градиентный поток не имеет замкнутых траекторий, а множество состояний равновесия градиентного потока совпадает с множеством критических точек функции φ. Аналогично методам, применявшимся Ляпуновым для исследования устойчивости состояния равновесия, можно показать, что размерность неустойчивого многообразия W^u_p состояния равновесия p (индекс Морса) равна $ind(p)$ (см. также [12], Proposition). Однако, класс топологической эквивалентности градиентного потока, вообще говоря, зависит от выбора метрики на многообразии M^n. В силу работы [16] (Theorem A) градиент-

---

[1] Доцент кафедры Теории управления и динамики машин ННГУ им. Н.И. Лобачевского; elena _ gurevich@list.ru

[2] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

[3] старший преподаватель, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math-ngaa@yandex.ru.

ный поток может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1-топологии) *потоком Морса-Смейла.*

Напомним, что поток f^t называется *потоком Морса-Смейла*, если он задается гладким векторным полем[4] $v : M^n \to TM^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1. неблуждающее множество потока $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических особых точек $p_1, \dots, p_l$ (собственные числа линеаризации поля $v(x)$ в особых точках имееют ненулевые действительные части) и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий $\gamma_1(t), \dots, \gamma_m(t)$ (мультипликаторы[5] любой замкнутой траектории по модулю не равны 1);
2. устойчивые и неустойчивые многообразия особых точек и периодических решений имеют трансверсальное пересечения.

Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком.*

Из работы С. Смейла [16] (Theorem B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует *самоиндексирующаяся энергетическая функция* — такая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$, что:

1. функция φ является функцией Морса;
2. множество критических точек функции φ совпадает с множеством состояний равновесия $\Omega(f^t)$ потока f^t;
3. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega(f^t)$ и любого $t > 0$;
4. $\varphi(p) = ind(p)$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

Более того, Смейл в [16] заметил, что существует такая метрика на M^n, в которой поток f^t является градиентным потоком для своей энергетической функции φ.

К. Мейер в работе [9] обобщил результат Смейла, построив для произвольных потоков Морса-Смейла на M^n энергетическую функцию Морса-Ботта, то есть такую фунцию Морса, гессиан которой в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня. Более того, из результатов работы Мейера следует, что самоиндексирующиеся энергетические функции можно использовать для топологической классификации градиенто-подобных потоков. Для точной формулировки этого результата напомним, что потоки f^t, f'^t на многообразии M^n называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях. Для разбиения множества потоков Морса-Смейла на классы относительно отношения топологической эквивалентности при помощи самоиндексирующейся энергетической функции мы будем использовать следующее определение топологической эквивалентности функций, принадлежащее Р. Тому (см. [18]).

Определение 1.1. *Две гладкие функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$\varphi' H = \chi\, \varphi.$$

---

[4] Как всегда, символы TM^n и NM^n обозначают касательное и нормальное расслоения над гладким многообразием M^n.

[5] Мультипликаторы периодического решения – собственные значения оператора линейной части отображения за период, определенного в некоторой окрестности этого решения.

Мейер доказал, что топологическая эквивалентности самоиндексирующихся энергетических функций является необходимым условием топологической эквивалентности соответствующих потоков Морса-Смейла, а в случае градиентно-подобных потоков на многообразиях размерности $n=2$ это условия также является достаточным[6].

Привлечение энергетической функции к решению задачи топологической классификации оказывается полезным при математическом моделировании, если энергетическая функция известна из физических сообоображений — например, как функция энергии для диссипативных систем в механике, потенциал электростатического поля, а также, при условии пренебрежения электрическими токами, потенциал магнитного поля (такая модель магнитного поля солнечной короны впервые предложена в работах [15], [1] и развита в [21],[22]).

Цель статьи — получить необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности в терминах энергетических функций для систем из класса $G(M^n)$, состоящего из градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений, все седловые состояния равновесия которых имеют индекс Морса 1 или $(n-1)$.

Для потока $f^t\in G(M^n)$ обозначим через Ω_i множество неподвижных точек индекса Морса $i\in\{0,1,n-1,n\}$, и через $|\Omega_i|$ — мощность множества Ω_i. Топология многообразия M^n и структура множества состояний равновесия потока f^t определяется следующей теоремой.

Теорема 1.1. *Пусть* $f^t\in G(M^n)$. *Тогда* $g=\frac{|\Omega_1\cup\Omega_{n-1}|-|\Omega_0\cup\Omega_n|+2}{2}$ *является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:*

1) если $g=0$, *то* M^n *является сферой* S^n;

2) если $g>0$, *то* M^n *гомеоморфно связной сумме*[7] g *копий многообразия* $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

В отличие от двумерной ситуации, уже в классе $G(M^n)$ при $n\geq 3$ существуют топологически неэквивалентные потоки, имеющие эквивалентные энергетические функции (примеры таких потоков описываются, в частности, в разделе 3.1.). Этот факт приводит к необходимости введения дополнительных инвариантов, различающих топологически неэквивалентные потоки. Для построения такого инварианта представим многообразие M^n в виде объединения связных аттрактора $A=W^u_{\Omega_1\cup\Omega_0}$, репеллера $R=W^s_{\Omega_{n-1}\cup\Omega_n}$ и множества $V=M^n\setminus(A\cup R)$, состоящего из блужающих траекторий потока f^t, идущих от A к R. Будем называть V *характеристическим пространством.*

Пусть $\varphi : M^n\to[0,n]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция для f^t. Гиперповерхность Σ уровня $c\in(1,n-1)$ назовем *характеристической секущей* (она пересекает каждую траекторию характеристического пространства в точности в одной точке).

Снабдим штрихом объекты потока $f'^t\in G(M^n)$, аналогичные введенным объектам для f^t.

---

[6] В работе [9] (proposition) утверждалось, что самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом для потоков Морса-Смейла, заданных на ориентируемых поверхностях. А.А. Ошемков и В.В. Шарко в работе [11] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла с замкнутыми траекториями на торе, имеющими эквивалентные самоиндексирующеся энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиентно-подобных потоков

[7] Связной суммой $M_1^n\sharp M_2^n$ двух ориентируемых связных n-многообразий M_1^n, M_2^n называется многообразие $M_1^n\sharp M_2^n$, полученное удалением из M_1^n, M_2^n шаров $B_1^n\subset M_1^n$, $B_2^n\subset M_2^n$ и склеиванием оставшихся многообразий с краем при помощи гомеоморфизма $\varphi:\partial B_1^n\to\partial B_2^n$, обращающего естественную ориентацию ∂B_1^n.

Определение 1.2. *Самоиндексирующиеся энергетические функции* φ, φ' *для потоков* $f, f'^t \in G(M^n)$ *назовём согласованно эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы* $H : M^n \to M^n$ *и* $\chi : [0,n] \to [0,n]$ *такие, что* $\varphi' H = \chi\, \varphi$ *(то есть функции* φ, φ' *эквивалентны) и* $H(W^s_{\Omega_1} \cap \Sigma) = W^s_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma)$, $H(W^u_{\Omega_{n-1}} \cap \Sigma) = W^u_{\Omega'_{n-1}} \cap H(\Sigma)$ *для некоторой характеристической секущей* Σ.

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1.2. *Потоки* $f^t, f'^t \in G(M^n)$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, их энергетические функции согласованно эквивалентны.*

В разделе 3.3. выделяется класс $G_0(M^n) \subset G(M^n)$ потоков, для которых из эквивалентности самоиндексирующихся функций следует их согласованная эквивалентности, и таким образом, самоиндексирующаяся энергетическая функция является полным топологическим инвариантом. Класс $G_0(M^n)$ состоит из потоков, индекс Морса всех седловых состояний равновесия которых равен 1. Аналогично доказательству теоремы 1.1. (см. также [4], теорема 1) доказывается следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Для любого потока* $f^t \in G_0(M^n)$ *неблуждающее множество* $\Omega(f^t)$ *содержит ровно один источник,* $k \geq 0$ *седел и* $k+1$ *сток, а объемлющее многообразие* M^n *диффеоморфно* n*-сфере.*

Основным результатом раздела 3.3. является следующая теорема.

Теорема 1.3. *Потоки* $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ *топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их самоиндексирующиеся энергетические функции.*

В заключение отметим, что проблема топологической классификации потоков из классов $G(M^3)$, $G(S^n)$, $n \geq 3$, решалась, в частности, в работах [20], [19], [14], [13]. Дж. Флейтасом в [20] получена топологическая классификация полярных потоков[8] на многообразиях размерности 2 и 3 при помощи диаграмм Хегора. Я. Л. Уманским в [19] получена топологическая классификация потоков Морса-Смейла на трехмерных многообразиях с конечным числом гетероклинических орбит. В этой работе для классификации использовался комбинаторный инвариант, описывающий взаимное расположение особых траекторий потока, аналогичный схеме динамической системы, введенной Е.А. Леонтович и А.Г. Майером для классификации потоков с конечным числом состояний равновесия на сфере S^2. С.Ю. Пилюгиным в [13] замечено, что в случае $M^n = S^n$, $n \geq 3$, класс $G(S^n)$ совпадает с классом всех градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений и получена полная топологическая классификация таких потоков при помощи обобщения схемы Леонтович-Майера. А.О. Пришляк в [14] получил полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на трехмерных многообразиях. Инвариант, введенный в работе [14], так же как и инвариант Дж. Флейтаса, явно включает информацию о следах двумерных сепаратрис на характеристической секущей. Таким образом, теорема 1.2., фактически, является обобщением упомянутых выше работ на случай потоков из класса $G(M^n)$ на произвольном многообразии M^n размерности $n > 3$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м РФФИ).

---

[8] Полярным потоком называется градиентно-подобный поток, множество состояний равновесия которого содержит в точности один источник, один сток и произвольное конечное число седел.

2. Топология несущего многообразия потоков из $G(M^n)$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.1.

Пусть $f^t \in G(M^n)$. Обозначим через $k \geq 0$ число седловых состояний равновесия потока f^t и через f сдвиг на единицу времени потока f^t. Тогда $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла, множество седловых периодических точек которого состоит из k неподвижных точек индекса Морса 1.

Если $k = 0$, то неблуждающее множество $\Omega(f)$ диффеоморфизма f состоит в точности из одного источника и одного стока, а объемлющее многообразие диффеоморфно $\mathbb{S}^n$ (см., например, [6], теорема 2.2.1).

Предположим, что утверждение верно для $i < k$ и докажем его справедливость для $i = k$. Обозначим через l число стоков и источников диффеоморфизма f.

Для определенности положим, что множество Ω_{n-1} непусто (в противном случае можно перейти к диффеоморфизму f^{-1}). Пусть $\sigma \in \Omega_{n-1}$.

Сфера $S^{n-1} = cl\ (W^u_\sigma)$ является топологическим аттрактором, следовательно, существует окрестность $U(S^{n-1}) \in M^n$ и целое положительное число $r(\sigma)$ такое, что $f^{r(\sigma)}(U(S^{n-1})) \subset int\ U(S^{n-1})$. Не уменьшая общности можно считать, что $r(\sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f, при этом многообразие M^n останется прежним).

Из работ [2], [4] следует, что для каждой седловой точки $\sigma \in \Omega_{n-1}$ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(S^{n-1}) \subset U(S^{n-1})$ сферы S^{n-1}, ограниченная гладко вложенными $(n-1)$-сферами S_1, S_2 и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1]$. Обозначим через γ_1 и γ_2 устойчивые сепаратрисы точки σ, через α_1 и α_2 источниковые точки, принадлежащие замыканиям γ_1 и γ_2 соответственно (возможно, $\alpha_1 = \alpha_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\gamma_1 \cap V(S^{n-1})$ и $\gamma_2 \cap V(S^{n-1})$ лежат в разных компонентах связности множества $V(S^{n-1}) \setminus S^{n-1}$.

Удалим из многообразия M^n внутренность окрестности $V(S^{n-1})$. Многообразие $M^n \setminus int\ V(S^{n-1})$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S_1, S_2. Обозначим через $\widetilde{M^n}$ компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^n \setminus int\ V(S^{n-1})$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых n-шаров B^n_1 и B^n_2. Определим диффеоморфизм Морса-Смейла $\tilde{f} \colon \widetilde{M^n} \to \widetilde{M^n}$ такой, что:

1) $\tilde{f}|_{\widetilde{M^n} \setminus (B^n_1 \cup B^n_2)}$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом $f|_{M^n \setminus int\ V(S)}$;

2) $\tilde{f}|_{B^n_1 \cup B^n_2}$ имеет только две неподвижные точки $\omega_1 \in B^n_1$, $\omega_2 \in B^n_2$, каждая из которых является неподвижным стоком.

Тогда диффеоморфизм $\tilde{f}$ имеет то же число неподвижных точек, что и диффеоморфизм f, и число его неподвижных седловых точек равно $k - 1$, а число стоков и источников равно $l + 1$. Далее рассмотрим две возможности: a) $M^n \setminus V(S^{n-1})$ не связно и b) $M^n \setminus V(S^{n-1})$ связно.

В случае a) многообразие $\widetilde{M^n}$ является непересекающимся объединением двух многообразий M^n_1 и M^n_2, а многообразие M^n — связной суммой $M^n_1 \# M^n_2$. Обозначим через f_1 и f_2 ограничения диффеоморфизма $\tilde{f}$ на многообразия M^n_1 и M^n_2 соответственно, через $\tilde{k} = k_1 + k_2 = k - 1$ — число седел и через $\tilde{l} = l_1 + l_2 = l + 1$ — число стоков и источников диффеоморфизма $\tilde{f}$. Так как k_1 и k_2 строго меньше чем k, то по предположению индукции многообразия M^n_1 и M^n_2 являются связными суммами, соответственно, $g_1 = \frac{k_1 - l_1}{2} + 1$ и $g_2 = \frac{k_2 - l_2}{2} + 1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ (под многообразием, состоящим из 0 копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ понимается многообразие $\mathbb{S}^n$). Следовательно, M^n — связная сумма $\frac{k_1 - l_1}{2} + 1 + \frac{k_2 - l_2}{2} + 1 = \frac{\tilde{k} - \tilde{l}}{2} + 2 = \frac{k - l}{2} + 1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Таким образом, в этом случае теорема верна.

В случае b) многообразие $\tilde{M}^n$ связно и, в силу [8] (лемма 7), $M^n = {M_1}^n \# M_*$, где M_* диффеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Снова обозначим через $\tilde{k}$ число седел и $\tilde{l}$ число стоков и источников диффеоморфизма $\tilde{f}$. Так как $\tilde{k} = k - 1$, то из предположения индукции следует, что M_1^n является либо сферой S^n, если $\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2}+1=0$, либо связной суммой $\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2}+1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Поскольку $\frac{k-l}{2}+1 = (\frac{\tilde{k}-\tilde{l}}{2}+1)+1$, мы получаем, что M^n — связная сумма $\frac{k-l}{2}+1$ копий $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, таким образом, теорема верна и в этом случае.

3. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^n)$

3.1. Примеры топологически неэквивалентных потоков с эквивалентными энергетическими функциями

В этом разделе приводятся две пары топологически неэквивалентных градиентно-подобных потоков на S^3, имеющих эквивалентные энергетические функции. Алгоритм построения таких потоков на сфере любой размерности $n \geq 3$ описан в работе [13].

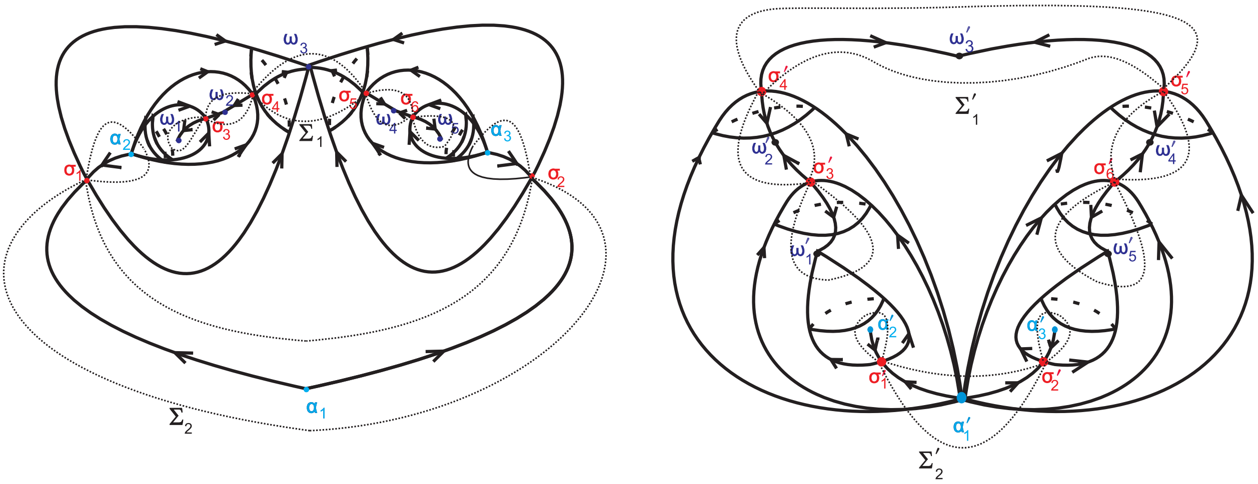

Рис. 1: Фазовые портреты и поверхности уровня энергетических функций топологически неэквивалентных потоков

Покажем, что на рисунке 1 изображены фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков из $G(S^3)$, имеющих топологически эквивалентные энергетические функции.

Поток, фазовый портрет которого изображен слева, имеет источник α_1, лежащий в замыкании в точности двух устойчивых многообразий седел, причем эти многоообразия одномерны. Поток, фазовый портрет которого приведен на том же рисунке справа, не имеет источниковых неподвижных точек, обладающих таким свойством. Поэтому эти потоки топологически неэквиваленты. В тоже время, поверхности Σ_1, Σ_1' и Σ_2, Σ_2' критических уровней энергетических функций этих потоков, соответствующие значениям 1 и 2 (они изображены точечным пуктиром), гомеоморфны и делят сферу S^3 на попарно гомеоморфные компоненты, откуда следует топологическая эквивалентность энергетических функций.

Еще один пример топологически неэквивалентных потоков получается при рассмотрении градиентно-подобных потоков на сфере S^3 с неблуждающим множеством, состоящим в точности из четырех неподвижных точек: источника, стока и двух седел разных индексов. Аналогично работе [5] можно показать, что двумерные инвариантные многообразия седел таких потоков пересекаются как минимум по одной некомпактной кривой (*гетероклинической кривой*). В работе [13] описана схема построения таких потоков, отличающихся количеством гетероклинических кривых. Очевидно, потоки, имеющие разное число гетероклинических кривых, топологически неэквивалентны. В тоже время, аналогично предыдущему случаю, поверхности критических уровней энергетических функций этих потоков, соответствующие значениям 1 и 2, гомеоморфны и делят сферу S^3 на гомеоморфные компонентны, откуда следует топологическая эквивалентность соответствующих энергетических функций.

3.2. Доказательство основного результата

В этом разделе излагается доказательство теоремы 1.2.

Необходимость. Пусть φ и φ' – самоидексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентных потоков Морса-Смейла f^t и f'^t из множества $G_0(M^n)$ и $h: M^n \to M^n$ гомеоморфизм, преобразующий траектории потока f^t в траектории потока f'^t. Тогда из определения самоидексирующейся функции и свойств гомеоморфизма h следует, что для любого состояния равновесия p потока f^t имеет место равенство $\varphi(p) = \varphi'(h(p))$. Поэтому выберем в качестве гомеоморфизма χ тождественное отображение, и сконструируем гомеоморфизм H, удовлетворяющий определению 1.2..

Пусть $x \in M^n$ произвольная точка, отличная от состояния равновесия потока f^t. Обозначим через l_x траекторию потока f^t (f'^t), проходящую через точку x и через $\alpha(l_x)$ $(\omega(l_x))$ состояние равновесия, являющееся α-предельным (ω-предельным) множеством траектории l_x. Положим $x' = h(x)$. Тогда $l_{x'} = h(l_x)$. Из свойств гомеоморфизма h следует, что $\alpha(l_{x'}) = h(\alpha(l_x))$, $\omega(l_{x'}) = h(\omega(l_x))$. Кроме того, имеют место равенства: $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'}))$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'}))$. Пусть $c \in (\varphi(\omega(l_x)), \varphi(\alpha(l_x)))$ и $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ $(\Sigma'_c = (\varphi')^{-1}(c))$. Отметим, что из определения энергетической функции следует, что пересечение $\Sigma_c \cap l_x$ $(\Sigma'_c \cap l_{x'})$ состоит из единственной точки. Тогда на множестве $M^n \setminus \Omega(f^t)$ корректно определено отображение $\tilde{H}$, ставящее в соответствие точке $y = \Sigma_c \cap l_x$ точку $y' = \Sigma'_c \cap l_{x'}$. По построению отображение $\tilde{H}$ является гомеоморфизмом между множествами $M^n \setminus \Omega(f^t)$ и $M^n \setminus \Omega(f'^t)$, преобразующим траектории потока f^t и множество регулярных уровней функции φ в траектории потока f'^t и множество регулярных уровней функции φ'[9]. В силу свойства $\varphi(\alpha(l_x)) = \varphi'(\alpha(l_{x'})$ и $\varphi(\omega(l_x)) = \varphi'(\omega(l_{x'})$ для любой точки x, отличной от состояния равновесия, гомеоморфизм однозначно продолжается до искомого гомеоморфизма H, удовлетворяющего условию: $\varphi(x) = \varphi'(H(x))$.

Достаточность. Пусть самоиндексирующиеся энергетические функции φ, φ' согласованно эквивалентны, то есть существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H: M^n \to M^n$ и $\chi: [0, n] \to [0, n]$ такие, что $\varphi' H = \chi\, \varphi$ и $H(W^s_{\Omega_1} \cap \Sigma) = W^s_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma)$, $H(W^u_{\Omega_{n-1}} \cap \Sigma) = W^u_{\Omega'_{n-1}} \cap H(\Sigma)$ для некоторой характеристической секущей Σ. Для любой точки $x \in \Sigma$ положим $x' = H(x)$ и обозначим через $l_x, l_{x'}$ траектории потоков f^t, f'^t, проходящие через точки x, x'. Для $c \in [0, n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$. Определим гомеоморфизм $H_V : V \to V'$ формулой $H_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$ для любой точки $y = l_x \cap \Sigma_c$, $c \in (0, n)$.

Поскольку гомеоморфизм $H|_\Sigma$ переводит следы $(n-1)$-мерных инвариантных многообразий седловых точек потока f^t на Σ в следы аналогичных объектов потока f'^t на $H(\Sigma)$ и замыкание любой сепаратрисы размерности $(n-1)$ седловой неподвижной точки σ потока f^t состоит из двух точек: точки σ и источника либо стока потока f^t (в

---

[9] Регулярным уровнем функции Морса называется уровень, не содержащей критических точек.

зависимости от индекса точки σ), то гомеоморфизм H_V однозначно продолжается на множества $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_{n-1}, \Omega_n$. Сохраним обозначение H_V для полученного гомеоморфизма и продолжим его на одномерные сепаратрисы седловых неподвижных точек.

Для этого отметим, что для любого $c \in (0,1)$ справедливо $H_V(\Sigma_c \backslash W^u_{\Omega_1}) = H(\Sigma_c) \backslash W^u_{\Omega'_1}$, и множества $W^u_{\Omega_1} \cap \Sigma_c$, $W^u_{\Omega'_1} \cap H(\Sigma_c)$ являются конечными объединениями одинакового количества точек. Отсюда следует, что гомеоморфизм H_V продолжается по непрерывности гомеоморфизмом $H_1 : W^u_{\Omega_1} \to W^u_{\Omega'_1}$. Аналогично строится гомеоморфизм $H_{n-1} : W^s_{\Omega_{n-1}} \to W^s_{\Omega'_{n-1}}$. Искомый гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$ определим формулой

$$h(x) = \begin{cases} H_V(x), \text{ если } x \in M^n \setminus (W^u_{\Omega_1} \cup W^s_{\Omega_{n-1}}); \\ H_1(x), \text{ если } x \in W^u_{\Omega_1}; \\ H_{n-1}(x), \text{ если } x \in W^s_{\Omega_{n-1}}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

3.3. Энергетическая функция как полный топологический инвариант потоков из класса $G_0(M^n)$

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.3., которая является непосредственным следствием теоремы 1.2. и приведенной ниже леммы.

Лемма 3.1. *Пусть φ, φ' самоиндексирующиеся энергетические функции потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ соответственно. Функции φ, φ' соласованно эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для потоков $f^t, f'^t \in G_0(M^n)$ из эквивалентности функций φ, φ' следует эквивалентность. Для любого $c \in [0,n]$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$ и $M_c = \varphi^{-1}([0,c])$. Поскольку функция Ляпунова убывает вдоль блуждающих траекторий потока, то $M_1 \cap W^s_{\Omega_1} = \Omega_1$. Откуда следует, что для каждой компоненты связности Q множества $M_1 \setminus \Omega_1$ существует единственный сток $\omega_Q \in \Omega_0$ такой, что $Q \subset W^s_{\omega_Q}$. Пусть $x \in Q$. Тогда траектория l_x потока f^t, проходящая через точку x имеет ω-предельную точку ω_Q и α-предельную точку α (в силу предложения 1.1. множество Ω_n состоит из одного источника α). Кроме того, для любого $c \in (0,n)$, множество $\Sigma_c \cap l_x$ состоит из единственной точки.

Положим $x' = H(x)$ и снабдим штрихом обозначения объектов потока f'^t, аналогичных введенным выше объектам потока f^t. Для любой характеристической секущей Σ гомеоморфизм H индуцирует гомеоморфизм $h : \Sigma \setminus W^s_{\Omega_1} \to H(\Sigma) \setminus W^s_{\Omega'_1}$, переводящий точку $y = l_x \cap \Sigma$ в точку $h(y) = l_{x'} \cap h(\Sigma)$.

Согласно теории Морса, гиперповерхности уровня Σ, $\Sigma' = H(\Sigma)$ являются гладкими сферами размерности $(n-1)$. Поскольку φ (φ') является энергетической функцией потока f^t (f'^t), то множество $C = \Sigma \cap W^s_{\Omega_1}$ ($C' = \Sigma' \cap W^s_{\Omega'_1}$) состоит из k сфер размерности $(n-2)$, по одной на каждом устойчивом многообразии множества $W^s_{\Omega_1}$ ($W^s_{\Omega'_1}$). В силу теоремы о кольце[10] существует гомеоморфизм $\tilde{h} : \Sigma \to \Sigma$ со следующими свойствами:

a) $\tilde{h}(C) = C'$;

b) существует окрестность $V(C)$ множества C такая, что $\tilde{h}|_{\Sigma \setminus V(C)} = h|_{\Sigma \setminus V(C)}$.

---

[10] Теорема о кольце звучит следующим образом: если $h_i : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$, $i \in \{1,2\}$, $n \geq 2$, – топологические вложения, и $K^n \subset \mathbb{R}^n$ – открытая область, ограниченная сферами $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, $h_1(\mathbb{S}^{n-1})$, то замыкание области K^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1]$. Справедливость гипотезы кольца в случае $n = 2$ следует из теоремы Антуана (1921 г.), в случае $n = 3$ — из теоремы Сандерсона (1960 г.), для $n > 4$ доказана Р. Кирби в 1969 году, а для случая $n = 4$ — Ф. Квинном в 1984 году.

Гомеоморфизм $\tilde{h}$ продолжается до гомеоморфизма $\widetilde{H}_V : V \to V'$, переводящего точку $y \in l_x \cap \Sigma_c$ в точку $\widetilde{H}_V(y) = l_{x'} \cap H(\Sigma_c)$, $c \in (0, n)$. Аналогично доказательству необходимости теоремы 1.2., гомеоморфизм $\widetilde{H}_V$ продолжается до искомого гомеомофизма $\widetilde{H} : M^n \to M^n$.

Список литературы

1. Altschuler M.D. , Newlirk Jr. G., “Magnetic fields and the strucuture of the solar corona”, *Solar Phisics*, **9**:1 (1969), 131-149.
2. Bonatti C. , Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its Applications*, **117** (2002), 335 – 344.
3. Conley C., “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).
4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61-86.
5. В.З.Гринес, Е.В. Жужома, В.С.Медведев, “О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентированных многообразиях”, *Мат. зам.*, **74**:3 (2003), 369–386.
6. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.
7. В.З. Гринес, О.В. Починка, А.Н. Сахаров, А.В. Рузаев, “Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных потоков с седлами одинакового индекса Морса на 3-многообразиях”, *Журнал средневолжского математического общества*, 2013.
8. Медведев В.С., Уманский Я.Л., “О разложении n-многообразий на простые многообразия”, *Известия Высших Учебных заведений*, 1979, № 1, 46-50.
9. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
10. Milnor J., *Morse Theory*, Princeton University Press, N.Y., 1963.
11. Ошемков А.А., Шарко В.В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.
12. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
13. Пилюгин С.Ю., “Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах”, *Дифференциальные уравнения*, **14**:2 (1978), 245-254.

14. Prishlyak A. O., “Complete topological invariants of Morse–Smale flows and handle decompositions of 3-manifolds”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **11**:4 (2005), 185–196.

15. Schatten K.H., Wilcox J.M., Ness N.F., “A model of interplanetary and coronal magnetic fields”, *Solar Physics March*, **6**:3 (1969), 442-455.

16. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.

17. Смейл С., “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи мат. наук*, **25**:1 (1970), 113 – 125.

18. Thom R., “La stabilite topologique des applications polinomiales”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.

19. Уманский Я. Л., “Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий”, *Мат. сб.*, **181**:2 (1990), 212 - 239.

20. Fleitas G., “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183.

21. Hoeksema J.T., Wilcox J. M., Scherrer P.H., “Structure of the heliospheric current sheet in the early portion of Sunspot Cycle 21”, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **87**:A12 (1982), 10331–10338.

22. Wang Y.-M., Sheeley Jr. N. R., “On potential field model of the solar corona”, *Astrophysical Journal, part 1*, **392**:1 (1992), 310-319.

On topological classification of gradient-like flows without heteroclinical intersection by means of energy function

© E. Ya. Gurevich[11], A. N. Sakharov[12], E. D. Tregubova[13].

Abstract. Presenting paper is an extension of paper [7] and devoted to topological classification of gradient-like flows on smooth closed orientable manifold M^n of dimension $n \geq 3$ by means of energy function. We consider class $G(M^n)$ of gradient-like flows without heteroclinic intersection, all saddle equilibria of which have Morse index equal 1 or $(n-1)$. We show that necessary and sufficient condition of topological equivalence for flows from $G(M^n)$ is equivalence of corresponding energy functions and special condition of equivalence energy functions on some level surface. Also we define a class $G_0(M^n)$ of flows for which energy function is complete invariant. Obtained results may be applied for quantity studying of dynamics for structurally stable systems with known energy function from physical contest of the model (as, for instance, energy function of dissipative systems in mechanics, potential of electrostatic fields or potential of current free magnetic field

Key Words: Morse-Smale flows, energy function, topological equivalence, topological classification

---

[11] Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod, elena _ gurevich@list.ru

[12] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.

[13] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math-ngaa@yandex.ru.