УДК 517.938

О существовании сепараторов магнитных полей в шаровом слое плазмы

© **В. З. Гринес[1], Е. В. Жужома[2], В. С. Медведев[3]**

Аннотация. В статье доказывается, что при выполнении определенных условий в шаровом слое плазмы существуют сепараторы магнитного поля.

Ключевые слова: магнитные поля, плазма, сепаратор, особые точки, шипы и веерные поверхности, диффеоморфизмы Морса-Смейла

1. Введение и формулировка основных результатов

Одной из важных задач геофизической динамики является изучение магнитных полей астрофизических тел (например, Солнца, Земли и т.п.). Общепринятая точка зрения (см. например [3], [4]) состоит в том, что возникновение достаточно сильных магнитных полей и их эволюция определяются процессами, связанными с наличием и движением электропроводящих сред (проводящей жидкости, газа, плазмы). Исследование взаимодействия между движущейся плазмой и магнитным полем составляет предмет магнитной гидродинамики (МГД), см., например, книги [7], [9] и обзор [11]. Согласно Ханнесу Альфвену [1], [12], базовым постулатом МГД является предположение о том, что силовые линии магнитного поля движутся так, как если бы они были "вморожены в плазму". При таком предположении возможны появления таких близких областей плазмы, что магнитные поля на их границах имеют различные направления. В данные моменты времени в магнитном поле могут появиться особенности (нули или нейтральные точки) и связанные с ними образования: шипы и веерные поверхности [10]. Топологическая структура магнитного поля определяется числом и типом особых точек, взаимным расположением шипов и веерных поверхностей, а также линиями трансверсального пересечения веерных поверхностей. Линии пересечения веерных поверхностей, отличные от замкнутых кривых, называются *сепараторами.* Таким образом, представляет интерес решение проблемы существования сепараторов и их количества при заданном расположении особенностей магнитного поля.

С точки зрения теории динамических систем движения плазмы разбиваются (с некоторой долей условности) на регулярные и хаотические. При этом можно рассматривать динамические системы как с дискретным временем (порожденные одним преобразованием), так и с непрерывным временем (однопараметрическое семейство преобразований). В настоящей статье рассматривается вопрос существования сепараторов магнитного поля в шаровом слое плазмы под действием регулярного движения, порожденного одним преобразованием. Для решения этого вопроса применяются методы качественной теории дискретных динамических систем. Несмотря на меняющееся в каждый момент времени магнитное поле (как под действием движения плазмы, так и в силу уравнений Максвелла),

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] Профессор кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

[3] Старший научный сотрудник НИИ ПМК при Нижегородском государственном университете имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; medvedev@uic.nnov.ru

движение плазмы при сделанных ниже предположениях можно доопределить до диффеоморфизма Морса-Смейла и применить развитую ранее авторами технику (см. книгу [5] и обзор [6]).

Опишем цель и результаты статьи более детально. Под особыми точками магнитного поля обычно понимают точки в которых поле либо обращается в ноль, либо не существует, при этом в окрестности особой точки поле топологически эквивалентно линейному гиперболическому седлу. Двумерная инвариантная поверхность седловой точки называется веерной поверхностью (fun), а одномерная инвариантная кривая седловой точки называется шипом (spine) [9][4]. Замкнутым шаровым слоем $\mathcal{S}$ называется множество, гомеоморфное произведению двумерной сферы на замкнутый промежуток $[-1;+1]$, то есть $\mathcal{S} = S^2 \times [-1;+1]$, где S^2 – двумерная сфера. Мы будем предполагать $\mathcal{S}$ вложенным в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Договоримся, что сфера $S^2 \times \{-1\} = S_{int}$, которая называется *внутренней*, ограничивает в $\mathbb{R}^3$ шар B^3, не содержащий шаровой слой. Сферу $S^2 \times \{+1\} = S_{ext}$ назовем *внешней*. Будем считать, что в некоторый момент времени магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ имеет в шаровом слое особые точки. Заметим, что в силу гиперболичности, число особых точек конечно. Будем предполагать, что шипы и веерные поверхности либо не пересекают границу шарового слоя, либо пересекают ее трансверсально. Таким образом, компоненты пересечения шипов и веерных поверхностей со сферами S_{int}, S_{ext} суть точки и кривые (замкнутые, или незамкнутые).

В статье рассматривается регулярное движение плазмы, порождаемое преобразованием $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таким, что его ограничение f_0 на $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами (см. рис. 1.1):

- $f_0 : \mathcal{S} \to f_0(\mathcal{S}) \subset \mathbb{R}^3$ является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом на свой образ, причем неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит из гиперболических седловых неподвижных точек и совпадает с множеством особых точек магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$;
- $f_0(S_{int}) \subset \mathcal{S}$, $f_0(S_{ext}) \subset \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{S} \cup B^3)$ так, что $f_0(S_{int})$ разбивает $\mathcal{S}$ на два шаровых кольца;
- веерные поверхности и шипы инвариантны относительно f_0, трансверсальны друг другу и являются замыканиями сепаратрис неподвижных точек диффеоморфизма f_0.

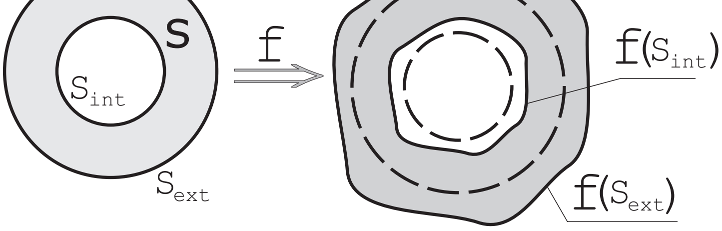

Рисунок **1.1**

Регулярное движение шарового слоя $\mathcal{S}$.

Отметим, что мы не требуем трансверсального пересечения силовых линий магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}_0$ со сферами S_{int}, S_{ext}. Поэтому веерные поверхности и шипы могут, вообще

[4] Следует заметить, что инвариантные поверхности и кривые, о которых идет речь, являются идеализациями так называемых "тонких"токовых слоев.

говоря, пересекать S_{int} и S_{ext} по нескольким компонентам связности. Предложенная математическая модель с физической точки зрения означает, что мы рассматриваем регулярное движение плазменного шарового слоя в течение столь малого промежутка времени, в течение которого сохраняются особые точки с веерными поверхностями и шипами. Из приведенных свойств вытекает, что сепараторы (если они существуют) инвариантны относительно f_0 и их число (включая ноль) не меняется в течение наблюдаемого промежутка времени.

Сформулируем основные результаты статьи для таких магнитных полей и движений плазмы, которые удовлетворяют выше приведенным свойствам.

Теорема 1.1. *Предположим, что магнитное поле в $\mathcal{S}$ имеет особенности. Тогда их не меньше двух.*

Теорема 1.2. *Предположим, что магнитное поле на $\mathcal{S}$ имеет ровно две особенности. Тогда их веерные поверхности пересекаются по конечному ненулевому числу сепараторов.*

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ (гранты 12-01-00672-а, 13-01-12452-офи-м) за финансовую поддержку. Особая благодарность Константину Витальевичу Кирсенко (бизнесмену и музыканту) за финансовую поддержку.

2. Доказательство основных результатов

Напомним некоторые понятия и факты, касающиеся диффеоморфизмов Морса-Смейла. Хорошим источником являются книги [5],[8], а также обзорные статьи [2], [15].

Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Для $x \in NW(f)$ обозначим через $W^s(x)$ (соотв. $W^u(x)$) устойчивое (соотв. неустойчивое) многообразие этой точки. Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, состоит из конечного числа точек, и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y \in NW(f)$. Диффеоморфизм f Морса-Смейла называется *градиентноподобным*, если для любых периодических точек p, $q \in NW(f)$ из $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ следует, что $\dim W^s(p) < \dim W^s(q)$.

Точка $x \in M$ трансверсального пересечения инвариантных многообразий $W^s(p)$, $W^u(q)$, где p, $q \in NW(f)$, называется *гетероклинической*, если $\dim W^s(p) = \dim W^s(q)$. Диффеоморфизм Морса-Смейла является градиентноподобным диффеоморфизмом тогда и только тогда, когда он не имеет гетероклинических точек.

Если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$ и $dim\ W^s(p) < dim\ W^s(q)$, то компоненту связности пересечения $W^u(p) \cap W^s(q)$ назовем *гетероклиническим подмногообразием*. Если размерность многообразия равна 3, то любое гетероклиническое подмногообразие является либо простой замкнутой кривой (гомеоморфной окружности), либо незамкнутой кривой без самопересечений (гомеоморфной открытому интервалу). Мы будем называть такие кривые *гетероклиническими*.

Пусть p - периодическая точка диффеоморфизма Морса-Смейла f. *Индексом Морса* точки p называется топологическая размерность неустойчивого многообразия $W^u(p)$, $u(p) \stackrel{\text{def}}{=} \dim W^u(p)$. *Индексом Кронекера-Пуанкаре* точки p называется число $ind\ (p,f) \stackrel{def}{=} (-1)^{u(p)}$.

Следующая лемма является ключевой для доказательства основных результатов. Обозначим через S^3 3-мерную сферу.

Лемма 2.1. *Существует вложение $\mathcal{S} \subset S^3$ и продолжение f_0 до полярного диффеоморфизма $f : S^3 \to S^3$ Морса-Смейла такого, что неблуждающее множество $NW(f)$ есть объединение источника, стока и неподвижных точек диффеоморфизма f_0.*

Доказательство. Приклеим к граничным компонентам S_{int}, S_{ext} шарового слоя $\mathcal{S}$ шары B^3_{int}, B^3_{ext} соответственно. Тогда мы получим замкнутое многообразие, диффеоморфное 3-мерной сфере $S^3 = \mathcal{S} \cup B^3_{int} \cup B^3_{ext}$, и естественное вложение $\mathcal{S} \subset S^3$. В силу свойств диффеоморфизма $f_0 : \mathcal{S} \to f_0(\mathcal{S})$, двумерная сфера S_{int} отображается внутрь шарового слоя. Поэтому f_0 можно продолжить на шар B^3_{int} так, чтобы внутри B^3_{int} появился гиперболический источник. Аналогично, f_0 можно продолжить на шар B^3_{ext} так, чтобы внутри B^3_{ext} появился гиперболический сток. Обозначим полученное продолжение диффеоморфизма f_0 через $f : S^3 \to S^3$. Ясно, что f_0 можно продолжить так, чтобы f являлся диффеоморфизмом, у которого неблуждающее множество получается из неблуждающего множества диффеоморфизма f_0 добавлением двух неподвижных точек.

Таким образом, диффеоморфизм f имеет конечное неблуждающее множество, состоящее из гиперболических неподвижных точек. По условию сепаратрисы седловых неподвижных точек пересекаются трансверсально. Следовательно, f является диффеоморфизмом Морса-Смейла. Так как f имеет только две узловые неподвижные точки, то f – полярный диффеоморфизм. $\square$

Доказательство теоремы 1.1..

Доказательство. Учитываю лемму 2.1., достаточно показать, что диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ Морса-Смейла не может иметь ровно три периодические точки на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Предположим противное. тогда неблуждающее множество содержит в точности одно седло, один сток и один источник. Следовательно, f не имеет гетероклинических кривых. В силу [14], для диффеоморфизма Морса-Смейла, не имеющего гетероклинических кривых, существует целое неотрицательное число m такое, что имеет место формула $l - k = 2 - 2m$, где l - число всех стоковых и источниковых периодических точек, и k - число всех седловых периодических точек. Поэтому для f должно выполняться равенство $1 = 2 - 2m$, которое невозможно ни при каком целом m. Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 1.2..

Доказательство. Учитываю лемму 2.1., мы далее будем рассматривать класс $MS_1(S^3, 4)$ диффеоморфизмов Морса-Смейла $S^3 \to S^3$ со следующим набором неподвижных точек: источник- α, сток - ω и два седла σ_1, σ_2. Покажем, что седла σ_1, σ_2 имеют разный индекс Морса. Предположим противное. Тогда f не имеет гетероклинических кривых. В работе [14] доказано, что в этом случае $M^3 = S^3$ есть связная сумма $m \geq 1$ экземпляров $S^2 \times S^1$, что невозможно.

Далее будем считать, что неподвижные точки имеют следующие индексы Кронекера-Пуанкаре (соотв. Морса) $ind\ (\alpha, f) = -1$ ($u(\alpha) = 3$), $ind\ (\omega, f) = 1$ ($u(\omega) = 0$), $ind\ (\sigma_1, f) = -1$ ($u(\sigma_1) = 1$), $ind\ (\sigma_2, f) = 1$ ($u(\sigma_2) = 2$).
Доказательство закончено.

Покажем, что имеют место следующие включения:

$$W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega), \quad W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha).$$

Поскольку f не может иметь гомоклинических точек, то $W^s(\sigma_i) \cap W^u(\sigma_i) = \emptyset$ ($i = 1, 2$). Так как f - структурно устойчивый диффеоморфизм, то $W^u(\sigma_1) \cap W^s(\sigma_2) = \emptyset$, иначе бы в точках пересечения не выполнялось сильное условие трансверсальности. Отсюда вытекают требуемые включения, так как S^3 разбивается на попарно не пересекающиеся инвариантные многообразия, устойчивые или неустойчивые соответственно.

Доказательство закончено.

Следующая лемма доказана в [13]. Мы приводим ее для ссылок, оставляя читателю доказательство в качестве упражнения.

Лемма 2.2. *Имеет место вложение* $W^s(\sigma) - \sigma \subset W^u(\alpha)$.

Покажем теперь, что диффеоморфизм f не имеет гетероклинических точек, то есть является градиентноподобным. Поскольку $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ и $W^s(\sigma_2) - \sigma_2 \subset W^u(\alpha)$, то $W^u(\sigma_1)$ не пересекает $W^s(\sigma_2)$. Если же $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$, то выполняется неравенство $2 = \dim W^s(\sigma_1) > \dim W^u(\sigma_2) = 1$, что означает градиентноподобность.

Существует C^1-иммерсия $\varphi : \mathbb{R} \to W^u(\sigma_1)$, где $\varphi(0) = \sigma_1$, являющаяся взаимно однозначным отображением на свой образ. Если положить $\varphi(\pm\infty) = \omega$, то получаем, что иммерсия φ может быть продолжена до гомеоморфизма $\varphi : S^1 \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to W^u(\sigma_1) \cup \{\sigma_1\}$, так как $W^u(\sigma_1) - \sigma_1 \subset W^s(\omega)$ и ω-предельное множество любой точки из множества $W^u(\sigma_1) - \sigma_1$ есть точка ω. Отсюда вытекает, что $C_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1)$ является вложением окружности. Аналогично, $C_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha\} \cup W^s(\sigma_2)$ также является вложением окружности.

Теперь докажем, что $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ содержит хотя бы одну незамкнутую гетероклиническую кривую с концевыми точками σ_1, σ_2. В устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ возьмем фундаментальную область F^s диффеоморфизма $f|_{W^s(\sigma_1)-\sigma_1}$. Так как точка σ_1 гиперболическая, то мы можем считать F^s замкнутым кольцом, ограниченным гладкими кривыми C_1 и C_2, которые окружают точку σ_1 в $W^s(\sigma_1)$. Возьмем в F^s простую замкнутую кривую C, гомотопную C_1 и C_2. Для удобства, разобьем дальнейшее доказательство на утверждения, которые мы будем обозначать как шаги. Конец доказательства каждого шага обозначим через $\diamond$.

Шаг 0 Для любой замкнутой кривой C, гомотопной кривым C_1 и C_2, пересечение $C \cap W^u(\sigma_2)$ не пусто.

Доказательство шага 0. Предположим, что $C \cap W^u(\sigma_2) = \emptyset$. Тогда $C \subset W^u(\alpha)$, поскольку $S^3 - \omega$ есть объединение только трех попарно непересекающихся неустойчивых многообразий $W^u(\alpha)$, $W^u(\sigma_2)$ и $W^u(\sigma_1)$. В силу компактности $C_\omega = \{\omega\} \cup W^u(\sigma_1)$, существует такая окрестность $U(\alpha)$ источника α, что $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$. Из включения $C \subset W^u(\alpha)$ и компактности C следует существование целого отрицательного числа n_0 такого, что $f^{n_0}(C) \subset U(\alpha)$.

Так как кривая $C \subset W^s(\sigma_1) - \sigma_1$ негомотопна нулю в $W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, то она ограничивает в $W^s(\sigma_1)$ диск D, содержащий точку σ_1. Поскольку f не имеет гомоклинических точек, диск D пересекается с C_ω ровно в одной точке σ_1. Поэтому C и C_ω образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$ (в зависимости от ориентаций кривых). Тогда $f^{n_0}(C)$ и $f^{n_0}(C_\omega)$ также образуют нетривиальное зацепление с коэффициентом зацепления -1 или $+1$. Из $f(C_\omega) = C_\omega$ вытекает равенство $f^{n_0}(C_\omega) = C_\omega$. Поэтому $f^{n_0}(C)$ и C_ω образуют нетривиальное зацепление. С другой стороны, $f^{n_0}(C) \subset U(\alpha)$. Так как $U(\alpha) \cap C_\omega = \emptyset$, то отсюда получаем, что коэффициент зацепления $f^{n_0}(C)$ и C_ω равен нулю. Мы получили противоречие. $\diamond$

Таким образом, $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \emptyset$. Так как $W^s(\sigma_1)$ и $W^u(\sigma_2)$ пересекаются трансверсально, то пересечение $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ состоит из кривых. В силу произвольности кривой C, пересечение $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ содержит, по крайней мере, одну дугу d, с концевыми точками a_1, a_2, лежащими на разных граничных компонентах C_1 и C_2 кольца F^s. Для определенности положим $a_i \in C_i$ ($i = 1, 2$). Обозначим через $\mathcal{D}$ кривую из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащую дугу d.

Шаг 1 Для компактного (в топологии многообразия $W^s(\sigma_1)$) подмножества $F \subset W^s(\sigma_1)$ и любой точки $m_0 \in int\ F$ существует окрестность $U(m_0)$, которая гомеоморфна диску и которая пересекается не более чем с одной кривой из пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$, при этом, если $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l, то пересечение $U(m_0) \cap l$ состоит из одной компоненты, гомеоморфной простой дуге, которая делит $U(m_0)$.

Доказательство шага 1. Предположим, что любая окрестность $U(m_0)$, гомеоморфная диску, пересекается более чем с одной кривой из $F \cap W^u(\sigma_2)$. Тогда существует последовательность точек $m_k \in F \cap W^u(\sigma_2)$, сходящихся к точке $m_0 \in int\ F$, такая, что m_k лежат на попарно различных компонентах пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$. Отсюда и трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что точки m_k изолированы в топологии неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Поэтому $m_0 \notin W^u(\sigma_2)$, иначе неустойчивое многообразие $W^u(\sigma_2)$ было бы самопредельным и существовали бы гомоклинические точки. Так как $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$, то либо $m_0 \in W^u(\alpha)$, либо $m_0 \in W^u(\sigma_1)$. Включение $m_0 \in W^u(\alpha)$ невозможно, поскольку неустойчивое многообразие $W^u(\alpha)$ открыто и не может содержать точек накопления неустойчивого многообразия $W^u(\sigma_2)$. Включение $m_0 \in W^u(\sigma_1)$ также невозможно, поскольку в силу $m_0 \in int\ F^s \subset W^u(\sigma_1)$, оно влечет наличие гомоклинических точек.

Теперь предположим, что $U(m_0)$ пересекается с одной кривой, скажем l, но пересечение $U(m_0) \cap l$ содержит компоненту, гомеоморфную простой дуге, которая не делит $U(m_0)$. Из вышеприведенного рассуждения и трансверсальности пересечения $F \cap W^u(\sigma_2)$ вытекает, что предельное множество кривой l в $U(m_0)$ состоит ровно из одной точки. Снова равенство $M^3 - \omega = W^u(\sigma_2) \cup W^u(\alpha) \cup W^u(\sigma_1)$ приводит к противоречию, так как предельная точка не может принадлежать ни $W^u(\alpha)$, ни $W^u(\sigma_1)$. Полученное противоречие завершает доказательство шага 1. $\diamond$

Шаг 2 Семейство дуг из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s, конечно.

Доказательство шага 2. Предположим противное. Тогда имеется точка $m_0 \in int\ F^s$, которая является топологическим пределом попарно различных кривых из $F^s \cap W^u(\sigma_2)$. Это противоречит шагу 1. $\diamond$

Обозначим через $d = d_1, \ldots, d_k$ занумерованные в циклическом порядке дуги из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$, концевые точки которых лежат на разных компонентах кольца F^s. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ - кривые из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$, содержащие дуги $d = d_1, \ldots, d_k$ соответственно. Отметим, что некоторые из кривых $\mathcal{D}_i$ могут совпадать.

Шаг 3 Среди кривых $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ существует, по крайней мере, одна незамкнутая.

Доказательство шага 3. Предположим противное. Согласно шагу 1, топологический предел кривых из пересечения $F^s \cap W^u(\sigma_2)$ сдержится в граничных компонентах кольца F^s. Отсюда и замкнутости кривых $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_k$ следует, что существует замкнутая кривая, непересекающаяся с кривыми из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ и содержащая на устойчивом многообразии $W^s(\sigma_1)$ внутри себя точку σ_1. Это противоречит шагу 0. $\diamond$

Будем для определенности считать, что кривая $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ незамкнута.

Шаг 4 Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ пересекает все кольца вида $f^i(F^s)$ по крайней мере одного из объединений $\cup_{i \geq 0} f^i(F^s)$, $\cup_{i \leq 0} f^i(F^s)$.

Доказательство шага 4. Достаточно доказать утверждение для кривой $\mathcal{D}$. Предположим противное. Тогда $\mathcal{D}$ лежит строго внутри конечного объединения $\cup_{i=i_1}^{i=i_2} f^i(F^s)$. Из незамкнутости $\mathcal{D}$ вытекает, что внутри этого объединения имеется точка m_0 такая, что либо любая ее окрестность $U(m_0)$ содержит счетное множество компонент пересечения $U(m_0) \cap \mathcal{D}$, либо m_0 является единственной предельной точкой одной из полукривых кривой $\mathcal{D}$. Это противоречит шагу 1. $\diamond$

Шаг 5 Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f.

Доказательство шага 5. Достаточно доказать утверждение для $\mathcal{D}$. Будем для определенности считать, что $\mathcal{D}$ пересекает все кольца из объединения $\cup_{i\geq 0} f^i(F^s)$. Предположим, что $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i для любого $i \geq 0$. Согласно шагу 4, для любого $i \geq 0$ существует дуга A_i кривой $\mathcal{D}$, лежащая в кольце $f^i(F^s)$ и имеющая концевые точки на разных граничных компонентах $f^i(C_1)$ и $f^i(C_2)$ этого кольца. Так как $\mathcal{D}$ не инвариантна относительно f^i, то дуги $f^{-1}(A_i)$ образуют семейство попарно непересекающихся дуг в кольце F^s, концевые точки которых лежат на разных граничных компонентах кольца F^s. Это противоречит шагу 2. $\diamond$

Шаг 6 Каждая незамкнутая кривая из $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ является кривой без самопересечений с концевыми точками σ_1, σ_2.

Доказательство шага 6. Достаточно рассмотреть кривую $\mathcal{D}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathcal{D}$ инвариантна относительно f. Дуга $d \subset \mathcal{D}$ пересекает фундаментальное кольцо F^s в разных окружностях, ограничивающих F^s. Так как $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(F^s) = W^s(\sigma_1) - \sigma_1$, то утверждение вытекает из шага 5. $\diamond$

Шаг 7 Каждая незамкнутая кривая из пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ после добавления концевых точек σ_1 и σ_2 превращается в непрерывный путь, соединяющий точки σ_1, σ_2.

Доказательство шага 7 достаточно провести для $\mathcal{D}$. В силу шага 1, в F^s кривая $\mathcal{D}$ не имеет точек накопления. Следовательно, она не имеет точек накопления в любом кольце $f^i(F^s)$. Так как в сколь угодно малой окрестности точки σ_1 лежат все кольца $f^i(F^s)$, начиная с некоторого момента, то $\mathcal{D}$ доопределяется в непрерывный путь в точке σ_1. Аналогично доказывается возможность непрерывного доопределения в σ_2. $\diamond$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Список литературы

1. Альфвен Х., *Космическая электродинамика*, ИЛ, 1952.
2. Аносов Д.В., “Исходные понятия. Элементарная теория.”, *В сб. серии "Современные проблемы математики Дин. системы - 1.* Т. Т. 1, ред. Аносов Д.В., 1985, 156-178; 178-204.
3. Вайнштейн С.И., *Магнитные Поля в Космосе*, Наука, М., 1983.
4. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., *Турбулентное Динамо в Астрофизике*, Наука, М., 1980.
5. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
6. Гринес В.З., Починка О.В., “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях.”, *Успехи Мат. Наук*, **68**, вып. 1(409) (2013), 129–188.
7. Каулинг Т., *Магнитная Гидродинамика*, ИЛ, 1959.
8. Нитецки З., *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975.
9. Прист Э.Р., *Солнечная Магнитогидродинамика*, Мир, М., 1985.
10. Прист Э.Р., Форбс Т., *Магнитное пересоединение: магнитогидро-динамическая теория и приложения*, ФМЛ, М., 2005.

11. Сыроватский С.И., “Магнитная гидродинамика.”, *Успехи Физ. Наук*, **62**, вып. 3 (1957), 247-303.

12. Alfven H., “On sunspots and the solar cycle.”, *Arc. f. Mat. Ast. Fys.*, **29A** (1943), 1-17..

13. Bonatti Ch., Grines V., “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3.”, *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579-602.

14. Bonatti Ch., Grines V., V. Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves.”, *Topology and Applications*, **117** (2002), 335-344.

15. Smale S., “Bull. Amer. Math. Soc.”, *Успехи Мат. Наук*, **1**, 73 (1967), 741-817.

On existence of separators of magnetic fields in a spherical layer of plasma

© V. Z. Grines[5], E. V. Zhuzhoma[6], B. S. Medvedev[7]

Abstract. In the paper, one proves that there exist separators of magnetic field in a spherical layer provided some conditions hold.

Key Words: magnetic fields, plasma, separator, fun, spine, singular points, Morse-Smale difeomorphisms

[5] Professor chair of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.

[6] Professor chair of theory of contral and dynmics of machins, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[7] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics at Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; medvedev@unn.ac.ru