

УДК 517.3

Решение обратной задачи дифракции в прямоугольном волноводе методом асимптотических интегральных уравнений

© А. А. Цупак¹, М. Ю. Медведик²

Аннотация. Рассмотрена обратная задача дифракции электромагнитного поля на объемном анизотропном неоднородном теле, помещенном в прямоугольный волновод. Доказана теорема об асимптотике тензора Грина на бесконечности. Выведена система асимптотических уравнений электромагнитного поля. Описан метод вращений объемного тела для определения компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей. Приведены результаты расчетов.

Ключевые слова: обратная электромагнитная задача дифракции, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, тензорная функция Грина, асимптотические уравнения, метод вращений

1. Введение

Рассматривается задача восстановления тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей объемного тела, расположенного в прямоугольном резонаторе, по известным значениям падающего и проходящего полей - эта задача рассматривалась в ряде работ, например в [1] - [3]. В настоящей работе (в отличие от перечисленных) предполагается, что тензор $\hat{\mu}(x)$ является неизвестным. Основная цель данной работы — исследование асимптотических свойств тензорной функции Грина рассматриваемой задачи и вывод системы асимптотических уравнений электромагнитного поля. Описывается метод вращений тела, позволяющий преобразовать асимптотические уравнения таким образом, чтобы в них входили любые компоненты неизвестных тензор-функций.

2. Постановка задачи. Интегро-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля на объемном теле V , расположенном в прямоугольном волноводе $P := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, b)\}$ с идеально проводящей границей ∂P . V характеризуется неизвестными тензор-функциями диэлектрической и магнитной проницаемостей $\hat{\varepsilon}(x)$, $\hat{\mu}(x)$; вне V среда однородна и изотропна — $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \hat{I}$, $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{I}$. Потребуем также выполнения следующих условий:

$$\hat{\varepsilon}(x), \hat{\mu}(x), \hat{\varepsilon}^{-1}(x), \hat{\mu}^{-1}(x) \in L_\infty(V).$$

Падающее поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ является решением краевой задачи для уравнений Максвелла в однородном волноводе и распространяется в направлении возрастания x_3 .

Требуется по известным амплитудам приходящего из $-\infty$ поля и прошедшего поля определить диэлектрическую и магнитную проницаемости тела V .

¹ Доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза; altsupak@yandex.ru.

² Доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет, г. Пенза; _medv@mail.ru.

Задача сводится к интегро-дифференциальным уравнениям электромагнитного поля по области неоднородности [4]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy + i\omega\mu_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy \\ \mathbf{H}(x) &= \mathbf{H}_0(x) + (k_0^2 + \text{grad div}) \int_V \hat{G}_H(x, y) \hat{\eta}(y) \mathbf{H}(y) dy - i\omega\varepsilon_0 \text{rot} \int_V \hat{G}_E(x, y) \hat{\xi}(y) \mathbf{E}(y) dy \end{aligned}$$

где $\hat{\xi} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - \hat{I}$, $\hat{\eta} = \frac{\hat{\mu}}{\mu_0} - \hat{I}$; $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$ — неизвестные проницаемости; $\hat{G}_E(x, y)$, $\hat{G}_H(x, y)$ — тензорные функции Грина (ТФГ), удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и обеспечивающие выполнение краевых условий на ∂P для электромагнитного поля.

3. Тензорные функции Грина. Асимптотические свойства ТФГ.

Тензорные функции Грина имеют диагональный вид [5]:

$$\begin{aligned} G_E^1 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2-\delta_{n0}}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi nx_1}{a} \sin \frac{\pi mx_2}{b} \cos \frac{\pi ny_1}{a} \sin \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_E^2 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2-\delta_{m0}}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi nx_1}{a} \cos \frac{\pi mx_2}{b} \sin \frac{\pi ny_1}{a} \cos \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_E^3 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\gamma_{nm}} \sin \frac{\pi nx_1}{a} \sin \frac{\pi mx_2}{b} \sin \frac{\pi ny_1}{a} \sin \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \\ G_H^1 &= G_E^2, \quad G_H^2 = G_E^1 \\ G_H^3 &= \frac{i}{ab} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2-\delta_{n0})(2-\delta_{m0})}{\gamma_{nm}} \cos \frac{\pi nx_1}{a} \cos \frac{\pi mx_2}{b} \cos \frac{\pi ny_1}{a} \cos \frac{\pi my_2}{b} e^{i\gamma_{nm}|x_3-y_3|} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Принятая в настоящей работе запись функций Грина отличается от обозначений в [5] определением γ_{nm} ; полагаем

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}.$$

Выберем ветвь квадратного корня так, чтобы обеспечить экспоненциальное убывание к нулю членов рядов при достаточно больших n , m . Для этого выполним разрез комплексной плоскости от точки ветвления $w_0 = 0$ вдоль нижней части мнимой оси. Отображение

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{|w|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi = \arg(w) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right)$$

является однолиственным, причем

$$w \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \sqrt{w} \in \mathbb{R}_+; \quad w \in \mathbb{R}_- \Rightarrow \sqrt{w} \in i\mathbb{R}_+.$$

Исследуем поведение компонент ТФГ, а также их производных при $x_3 \rightarrow \pm\infty$.

Большинство волноводов, применяемых в исследовании распространения волн и свойств материальных сред работают в так называемом *одномодовом* режиме, при котором свободно может распространяться одна волна на некоторой частоте. Чаще всего используется следующее соотношение ширины и высоты волновода: $a = 2b$.

Будем предполагать, что частота ω выбирается так, что $k_0 \in \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{b}\right)$. Тогда

$$\gamma_{nm} \in \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{если } m = n = 0 \text{ или } m = 0, n = 1, \\ i\mathbb{R}_+ & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Значению γ_{10} отвечает незатухающая в волноводе мода; волн, отвечающих паре $n = m = 0$, не существует [6].

Рассмотрим основное утверждение об асимптотике ТФГ, по аналогии с которым выводятся и остальные асимптотические свойства.

Л е м м а 3.1. $G_E^1(x, y) \rightarrow 0$ при $x_3 \rightarrow \infty$ равномерно по $y \in V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Суммирование по m ведется, начиная с единицы, поэтому члены ряда G_E^1 равномерно убывают к нулю при $x_3 \rightarrow \infty$. Пусть $G_E^1 = \Sigma' + \Sigma''$; причем в первой сумме n, m таковы, что

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 > \frac{4}{3}k_0^2, \quad (3.2)$$

а во втором - по всем остальным n, m . Оценим каждое из слагаемых.

Так как в Σ'' присутствует лишь конечное число слагаемых N , то

$$|\Sigma''| \leq C \cdot N |e^{i\gamma_{nm}^*|x_3-y_3}| \Rightarrow 0, \quad y_3 \in V,$$

где C — некоторая константа, а γ_{nm}^* — значение корня, обеспечивающее оценку сверху.

Рассмотрим теперь ряд Σ' . В силу условия ((3.2)) для n, m верно

$$|\gamma_{nm}| > \frac{1}{2} \left| \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2} \right|,$$

поэтому

$$|\Sigma'| \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2}|x_3-y_3|} \leq C_1 \sum e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi n}{a} + \frac{\pi m}{b}\right)|x_3-y_3|}$$

; в силу интегрального признака сходимости знакопостоянного ряда получим окончательно

$$|\Sigma'| \leq C_1 \int_{u_0}^{+\infty} \int_{v_0}^{+\infty} e^{-(u+v)|x_3-y_3|} dudv \leq C_2 \left(\int_{u_*}^{+\infty} e^{-u|x_3-y_3|} du \right)^2 = \frac{C_2}{|x_3 - y_3|^2} e^{-2u_*|x_3-y_3|} \Rightarrow 0,$$

где $u_0, v_0 > 0$, $u_* := \min\{u_0, v_0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Аналогично доказывается существование следующих важных пределов:

$$\begin{aligned} G_E^3 &\Rightarrow 0, \quad G_H^2 \Rightarrow 0, \\ G_E^2 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0, \\ G_H^1 - \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0 \\ G_H^3 - \frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} - \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} &\Rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Видно, что некоторые компоненты ТФГ не имеют предела при $x_3 \rightarrow \infty$, однако впредь будем писать, например, так:

$$G_E^2 \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi a}{x_1} \sin \frac{\pi a}{y_1} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|},$$

понимая предельный переход в смысле формул (3.3)

Все равномерно убывающие к нулю члены рядов ТФГ имеют производные любого порядка по каждой из переменных, также равномерно исчезающие на бесконечности. Поэтому несложно получить асимптотику для производных компонент ТФГ. В качестве примеров приведем некоторые из результатов:

$$\frac{\partial G_E^1}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^3}{\partial x_k}, \frac{\partial G_H^2}{\partial x_k}, \frac{\partial G_E^2}{\partial x_2}, \frac{\partial G_H^3}{\partial x_2} \Rightarrow 0, \quad \frac{\partial G_H^3}{\partial x_1} \Rightarrow -\frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|},$$

$$\frac{\partial G_H^3}{\partial x_3} \Rightarrow \text{sign}(y_3 - x_3) \left[\frac{e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|}}{a} b + \frac{2}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right]$$

4. Асимптотические интегральные уравнения электромагнитного поля

Записанные выше интегро-дифференциальные уравнения можно рассматривать и как представление поля $\mathbf{E}(x)$, $\mathbf{H}(x)$ вне V области неоднородности через значения падающего поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и полей в области неоднородности (\mathbf{E} , \mathbf{H} в интегро-дифференциальных операторах). В так понимаемых уравнениях и осуществим предельный переход.

В полученных ниже формулах, вытекающих из доказанной леммы, предполагается суммирование по повторяющемуся индексу и подразумевается стремление при $x_3 \rightarrow \pm\infty$ равномерно по $y \in V$.

$$\hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_2, \quad \text{grad div } \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow 0$$

$$\text{rot } \hat{G}_E \hat{\xi} \mathbf{E} \Rightarrow \frac{\text{sign}(x_3 - y_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\hat{G}_E \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{i}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \left(\frac{i}{ab\gamma_{00}} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

$$\text{rot } \hat{G}_E \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{\text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_2 +$$

$$+ \frac{2\pi i}{a^2 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_2$$

$$\text{grad div } \hat{G}_H \hat{\eta} \mathbf{H} \Rightarrow \frac{-i\pi^2}{a^3 b \gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2 b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_1 +$$

$$+ \frac{\pi \text{sign}(y_3 - x_3)}{a^2 b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3 -$$

$$- \left(\frac{i\gamma_{00}}{ab} e^{i\gamma_{00}|x_3-y_3|} + \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} \right) (\eta_{3l} H^l) \cdot \mathbf{e}_3$$

Из последних формул вытекают уравнения для компонент поля:

$$\begin{aligned}
 E_{\infty}^1 &= E_0^1, \quad E_{\infty}^3 = E_0^3, \quad H_{\infty}^2 = H_0^2 \\
 E_{\infty}^2 &= E_0^2 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy + \\
 &\quad + \frac{i\omega\mu_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{2\pi\omega\mu_0}{a^2b\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy \\
 H_{\infty}^1 &= H_0^1 + \frac{ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{i\pi^2}{a^3b\gamma_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{2\pi \text{sign}(x_3 - y_3)}{a^2b} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{i\omega\varepsilon_0 \text{sign}(y_3 - x_3)}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy \\
 H_{\infty}^3 &= H_0^3 + \frac{2ik_0^2}{ab\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy - \\
 &\quad - \frac{2i\gamma_{10}}{ab} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{3l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{\pi \text{sign}(y_3 - x_3)}{a^2b} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\eta_{1l} H^l) dy + \\
 &\quad + \frac{\pi\omega\varepsilon_0}{a^2b\gamma_{10}} \cos \frac{\pi x_1}{a} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{i\gamma_{10}|x_3-y_3|} (\xi_{2l} E^l) dy
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для получения асимптотических уравнений в окончательном виде определим вид поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 и поля на бесконечности. Следуя [6], запишем электрическое поле в виде:

$$\mathbf{E}_0 = \left[0, \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}, 0 \right]^T,$$

а соответствующее ему магнитное поле получим из однородных уравнений Максвелла в полем волноводе:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_0 = \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \cdot \mathbf{e}_3$$

Таким образом, компоненты падающего поля определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 E_0^1 &= E_0^3 = H_0^2 = 0; \quad E_0^2 = F^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \\
 H_0^1 &= F^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}; \quad H_0^3 = F^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь коэффициент $F^{(+)}$ определяет амплитуду падающей волны и считается известным.

Прошедшее поле также считается известным, а его амплитуда может быть определена экспериментально; обозначим ее $T^{(+)}$. Учитывая, что поляризация прошедшего поля сохраняется, запишем его в виде:

$$\begin{aligned} E_{+\infty}^1 = E_{+\infty}^3 = H_{+\infty}^2 = 0; \quad E_{+\infty}^2 = T^{(+)} \frac{i\pi\omega\mu_0}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \\ H_{+\infty}^1 = T^{(+)} \frac{-i\pi\gamma_{10}}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3}; \quad H_{+\infty}^3 = T^{(+)} \frac{\pi^2}{a^2} \cos \frac{\pi x_1}{a} e^{i\gamma_{10}x_3} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в интегро-дифференциальные уравнения и сокращая общие множители, получим окончательный вид асимптотических интегральных уравнений электромагнитного поля в волноводе с локальной анизотропной неоднородностью:

$$\begin{aligned} T^{(+)} = F^{(+)} + \frac{k_0^2}{\omega\mu_0\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy - \\ - \frac{1}{b\pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy \\ T^{(+)} = F^{(+)} - \frac{k_0^2}{\pi b\gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy - \\ - \frac{\pi}{a^2 b\gamma_{10}^2} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ + \frac{2i}{ab\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy + \\ + \frac{\omega\varepsilon_0}{b\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy \\ T^{(+)} = F^{(+)} + \frac{2iak_0^2}{b\pi^2\gamma_{10}} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy - \\ - \frac{1}{b\pi} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{3l}H^l) dy + \\ + \frac{2ia\gamma_{10}}{b\pi^2} \int_V \cos \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\eta_{1l}H^l) dy + \\ + \frac{\omega\varepsilon_0}{b\pi\gamma_{10}} \int_V \sin \frac{\pi y_1}{a} e^{-i\gamma_{10}y_3} (\xi_{2l}E^l) dy \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнения (4.5) не содержат всех компонент искомого тензора — отсутствуют элементы 2-ой строки тензора $\hat{\eta}$, а также компоненты 1-ой и 3-ей строк для $\hat{\varepsilon}$. Поэтому рассматриваемая задача может быть решена, если задан некоторый известный заранее класс материалов и соответствующая им структура тензора: например, могут рассматриваться только кристаллы фиксированного типа или только изотропные тела. Эта проблема решается вращением тела V .

Проведем подробные рассуждения для тензора $\hat{\varepsilon}$. При самых общих предположениях относительно рассматриваемого тела V его диэлектрическая проницаемость характеризуется двухвалентным тензором:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Если $[P]$ — матрица перехода от старого ортонормального базиса \mathcal{B} к новому \mathcal{B}' , определяющая преобразование декартовой системы координат, то

$$\hat{\varepsilon}'(x') = [P]^{-1} \hat{\varepsilon}(x) [P].$$

при условии, что тело V не меняет своего положения (если же вместе с осями поворачивается и тело, то компоненты его тензора не меняются). Обратно, если по отношению к осям изменить положение тела V , то получится новый набор коэффициентов.

Пусть V содержится в объеме $Q = \{x : x_1 \in (0, a), x_2 \in (0, b), x_3 \in (-c, c)\}$. Будем рассматривать повороты тела вокруг центра области Q на угол φ в плоскостях, параллельных трем координатным. Такие повороты равносильны композиции трех преобразований: сдвиг тела на вектор $(-a/2, -b/2, 0)^T$, его поворот вокруг начала координат в нужной плоскости и обратный сдвиг; при этом сдвиги не меняют структуры тензора.

Посмотрим, как преобразуется тензор $\hat{\varepsilon}$ при повороте тела на угол φ по часовой стрелке вокруг оси Ox_3 . Это преобразование равносильно повороту системы координат тела на угол φ против часовой стрелки и определяется матрицей (преобразования базисов)

$$[P^{(3)}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обозначив $\cos \varphi =: c$, $\sin \varphi =: s$, вычислим

$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 c^2 + \varepsilon_1^2 cs + \varepsilon_2^1 cs + \varepsilon_2^2 s^2 & -\varepsilon_1^1 cs + \varepsilon_1^2 c^2 - \varepsilon_2^1 s^2 + \varepsilon_2^2 cs & \varepsilon_3^1 c + \varepsilon_3^2 s \\ -\varepsilon_1^1 cs - \varepsilon_1^2 s^2 + \varepsilon_2^1 c^2 + \varepsilon_2^2 cs & \varepsilon_1^1 s^2 - \varepsilon_1^2 cs - \varepsilon_2^1 cs + \varepsilon_2^2 c^2 & -\varepsilon_3^1 s + \varepsilon_3^2 c \\ \varepsilon_3^1 c^2 + \varepsilon_3^2 s & -\varepsilon_3^1 s + \varepsilon_3^2 c & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяются матрицы поворотов вокруг двух других координатных осей. При повороте тела на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг осей Ox_3 , Ox_2 , Ox_1 получим соответственно вид преобразованного тензора:

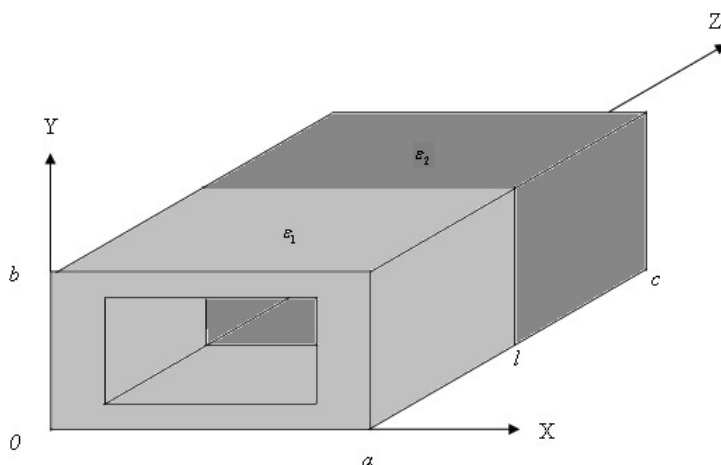
$$\hat{\varepsilon}^{(3)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2^2 & -\varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^3 \\ -\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^1 & -\varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_3^2 & -\varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^{(2)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_3^3 & -\varepsilon_3^2 & -\varepsilon_3^1 \\ -\varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^1 \\ -\varepsilon_1^3 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\varepsilon}^{(1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^3 & -\varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_3^1 & \varepsilon_3^3 & -\varepsilon_3^2 \\ -\varepsilon_2^1 & -\varepsilon_2^3 & \varepsilon_2^2 \end{bmatrix}.$$

Эти преобразования позволяют записать асимптотические уравнения с вхождением в них всех требуемых компонент. Например, при повороте вокруг оси Ox_3 уравнения будут содержать неизвестные ε_1^j и μ_2^j .

5. Результаты вычислений

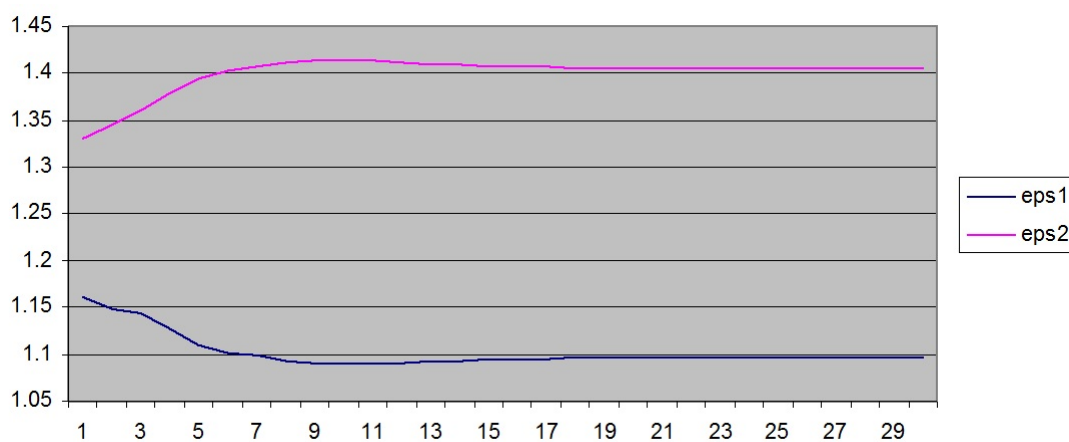
На приведенных ниже графиках представлены результаты восстановления диэлектрической проницаемости для тел, имеющих сложную геометрическую форму. На рисунке 5.1 изображено неоднородное тело — первая половина тела, изображенная светло серым цветом, имеет проницаемость $\hat{\epsilon} = 1.1\hat{I}$, а вторая половина тела — проницаемость $\hat{\epsilon} = 1.4\hat{I}$. Обе части тела представляют собой прямоугольные параллелепипеды с прямоугольными отверстиями, ориентированными вдоль оси Ox_3 и равноотстоящими от осей Ox_1 и Ox_2 . На рисунке 5.2 представлен график восстановления диэлектрической проницаемости тела по коэффициенту прохождения — вычисления производились при волновых числах $k_0 = 1.6$ и $k_0 = 1.7$. Начальное приближение диэлектрической проницаемости каждой половины тела равнялось $\hat{\epsilon} = 1.2\hat{I}$, и $\hat{\epsilon} = 1.3\hat{I}$ соответственно.

На рисунке 5.4 представлены результаты расчетов для тела, изображенного на рисунке 5.3, и характеризующего проницаемостями $\hat{\epsilon} = 1.1\hat{I}$ и $\hat{\epsilon} = 1.6\hat{I}$. Вычисления производились при волновых числах $k_0 = 1.6$ и $k_0 = 1.7$. Начальное приближение диэлектрической проницаемости каждой половины тела равнялось $\hat{\epsilon} = 1.2\hat{I}$, и $\hat{\epsilon} = 1.5\hat{I}$ соответственно.



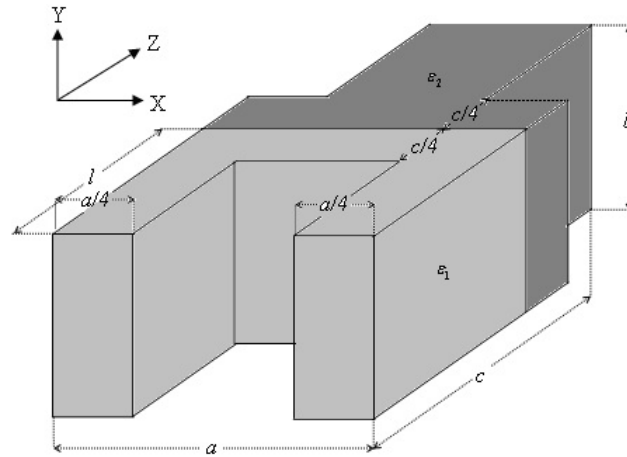
Р и с у н о к 5.1

Форма тела: $a=2$, $b=1$, $c=2$, $l=1$



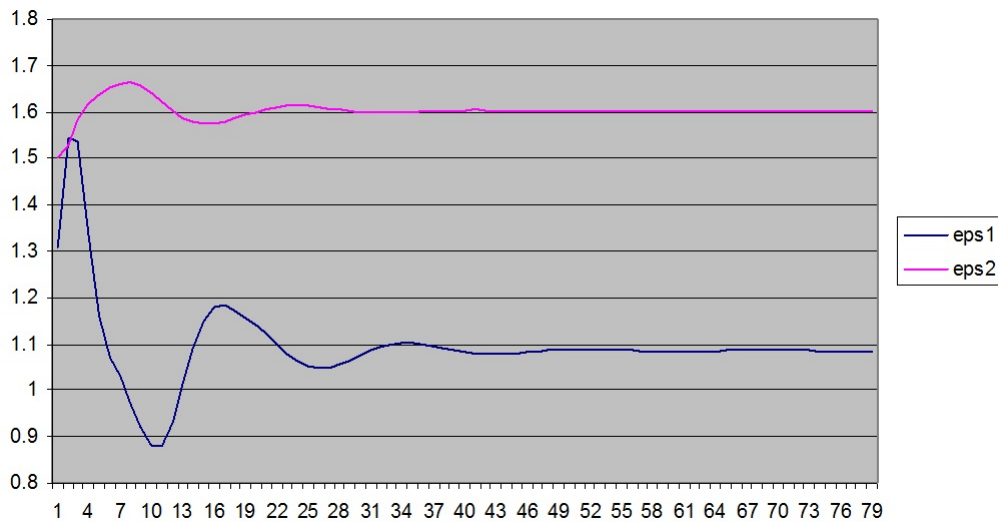
Р и с у н о к 5.2

График восстановления диэлектрической проницаемости



Р и с у н о к 5.3

Форма тела: $a=2$, $b=1$, $c=2$, $l=1$



Р и с у н о к 5.4

График восстановления диэлектрической проницаемости

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов Ю.Г., “О существовании и единственности решений обратной краевой задачи для определения эффективной диэлектрической проницаемости наноматериалов”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2009, № 1, 11–24.
2. Смирнов Ю.Г., Медведик М. Ю., Васюнин Д.И., “Метод коллокации решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче определения диэлектрической проницаемости материала”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2009, № 3, 71–87.

3. Дервянчук Е. Д., “Решение обратной задачи определения диэлектрической проницаемости диафрагмы в волноводе”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 36–44.
4. Самохин А. Б., *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*, Радио и Связь, М., 1998.
5. Марков Г. Т., Панченко Б. А., “Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов”, *Известия Вузов СССР. Радиотехника*, 1966, № 1, 34–41.
6. Вайнштейн Л. А., *Электромагнитные волны*, Советское радио, М., 1957, 336 с.

Solving the inverse electromagnetic diffraction problem in rectangular waveguide using the method of asymptotic integral equations

© А. А. Tsupak³, М. Yu. Medvedik⁴

Abstract. Inverse electromagnetic diffraction problem on anisotropic heterogeneous dielectric body in rectangular waveguide is considered. Theorem considering Green’s tensor asymptotic behavior is proved. The system of asymptotic integral equations for electromagnetic field is obtained. Rotation method for tensor permittivity and permeability determination is described. Numerical results

Key Words: inverse electromagnetic diffraction problem, tensor permittivity and permeability tensors, tensor Green’s function, asymptotic equations, rotation method

³ Associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modelling, Penza State University; altsupak@yandex.ru

⁴ Associate professor, sub-department of mathematics and supercomputer modelling, Penza State University; _medv@mail.ru