УДК 517.948.67

О возмущениях в спектре Э.Шмидта линейных операторов в гильбертовых пространствах

© Д. Г. Рахимов[1]

Аннотация. В теории возмущений дискретного спектра фредгольмовых операторов в работах [5], [6] предложена регуляризация, позволяющая сводить случаи возмущений кратных собственных значений к простым. В данной работе регуляризованные методы возмущений, в том числе и в аспекте ложных возмущений по М.Г.Гавурину [8], применяются к спектральным задачам по Э.Шмидту.

Ключевые слова: методы теории ветвления, спектр Э.Шмидта, теория возмущений, уравнение разветвления, обобщенные жордановы цепочки (ОЖЦ), регуляризация

1. Введение.

В начале прошлого века Э.Шмидт в ряде своих статей рассматривая линейные и нелинейные интегральные уравнения ввел собственные значения λ_k оператора действующего в гильбертовом пространстве $B : H \to H$ и соответствующие собственные элементы $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$ удовлетворяющие отношениям $Bu_k = \lambda_k v_k, B^* v_k = \lambda_k u_k$. В дальнейшем [1-4] эти собственные значения стали называться "спектром Э.Шмидта".

В работе [2] определяется фредгольмовость собственных значений Э.Шмидта и обобщенные жордановые цепочки (ОЖЦ). Рассматривается численный метод, основанный на методе ложных возмущений для определения собственных значений Э.Шмидта и соответствующих им собственных элементов.

В данной работе методами регуляризации (представленными в [5, 6]) в задачах теории ветвления [7] исследуется возмущение спектра Э.Шмидта. Применением метода диаграммы Ньютона к уравнению разветвления устанавливаются порядки зависимости собственного значения возмущенного оператора от параметра возмущения ε.

2. Постановка задачи

Пусть $H-$ гильбертово пространство, и $B_0, A_0 : H \to H$ - линейные операторы.

Определение 2.1. *Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением Э.Шмидта, если система уравнений*

$$B_0\varphi = \lambda A_0\psi,\ B_0^*\psi = \lambda A_0\varphi \tag{2.1}$$

имеет нетривиальные решения (φ, ψ). Пару (φ, ψ) называют A_0 -собственным элементом Э.Шмидта соответствующим собственному значению λ.

В прямой сумме $H \bigoplus H$ равенства (2.1) можно написать в матричном виде

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda\mathcal{A}_0)\oplus = \begin{pmatrix} -\lambda A_0^* & B_0^* \\ B_0 & -\lambda A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0,$$

[1] доцент, Национальный университет Узбекистана, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0^* & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются A_0^*-собственные элементы Э.Шмидта оператора B_0, отвечающие тем же собственным значениям λ

$$B_0\tilde{\varphi} = \lambda A_0^*\tilde{\psi}, \ B_0^*\tilde{\psi} = \lambda A_0\tilde{\varphi}$$

или

$$(\mathcal{B}_0^* - \lambda\mathcal{A}_0^*)\,\Psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $N(\mathcal{B}_0 - \lambda\mathcal{A}_0) = \{\Phi_i\}_1^n$, $N(\mathcal{B}_0^* - \lambda\mathcal{A}_0^*) = \{\Psi_i\}_1^m$.

Определение 2.2. *Если $m = n$, то собственное значение λ называется фредгольмовым, в ином случае λ называется нетеровым.*

Пусть λ_0 - фредгольмова точка спектра Шмидта оператор-функции $\mathcal{B}_0 - t\mathcal{A}_0$ с соответствующими $\mathcal{A}_0-$ и $\mathcal{A}_0^*-$ жордановыми цепочками с длинами $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0)\,\Phi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(k-1)}, \ (\mathcal{B}_0^* - \lambda_0\mathcal{A}_0^*)\,\Psi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0^*\Psi_{i0}^{(k-1)}, \ k = \overline{2, p_i}, \ i = \overline{1, n},$$

$$K = det\left\|\langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{j0}^{(1)}\rangle\right\| \neq 0, \ L = det\,\|L_{ij}\| \neq 0, \ L_{ij} = det\left\|\langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{j0}^{(l)}\rangle\right\|,$$

$$k(l) = \overline{2, p_i(p_j)}, \ i(j) = \overline{1, n}.$$

Согласно [2, 4] элементы $\Phi_{i0}^{(j)}$, $\Psi_{k0}^{(l)}$, $j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}$, $i(k) = \overline{1, n}$ $\mathcal{A}_0$- и $\mathcal{A}_0^*$-жордановых наборов, отвечающих λ_0 оператор-функции $\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности

$$\langle\Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}, \ \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

где $\Gamma_{k0}^{(l)} = \mathcal{A}_0^*\Psi_{k0}^{(p_k+1-l)}$, $Z_{i0}^{(j)} = \mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i+1-j)}$. Для нашей задачи эти соотношения имеют вид

$$\langle\Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)}\rangle = \langle\varphi_{i0}^{(j)}, A_0^*\tilde{\varphi}_{k0}^{(p_k+1-l)}\rangle + \langle A_0\psi_{i0}^{(j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(p_k+1-l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},$$

$$\langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)}\rangle = \langle\varphi_{i0}^{(p_i+1-j)}, A_0^*\tilde{\varphi}_{k0}^{(l)}\rangle + \langle A_0\psi_{i0}^{(p_i+1-j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Пусть $\varepsilon \subset \mathbb{C}-$ малый параметр, $|\varepsilon| \leq \varrho_0$ и $A(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\varepsilon^k : H \to H$, возмущенная оператор-функция, такая что $A(0) = A_0$.

Ставится задача: найти собственные значения $\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ задачи

$$B_0\varphi = \lambda A(\varepsilon)\,\psi, \ B_0^*\psi = \lambda A^*(\varepsilon)\,\varphi \tag{2.2}$$

такие, что $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а также собственные элементы $\Phi_i(\varepsilon)$, отвечающие этим собственным значениям.

2.1. Построение уравнения разветвления.

Поставленную задачу запишем в матричной форме:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0)\,\Phi = \mu\mathcal{A}(\varepsilon)\Phi + \lambda_0\mathcal{A}_1(\varepsilon)\Phi$$

где

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A^*(\varepsilon) & 0 \\ 0 & A(\varepsilon) \end{pmatrix},\ \mathcal{A}_1(\varepsilon) = \mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_0.$$

Строим операторы

$$(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda\mathcal{A}(\varepsilon)})_i = \mathcal{B}_0 - \lambda\mathcal{A}(\varepsilon) + \sum_{j\neq i} \langle \cdot, \Gamma_{j0}\rangle\, Z_{j0}. \tag{2.3}$$

Т е о р е м а 2.1. *При каждом* $i = \overline{1,n}$ *и достаточно малых* ε *существуют постоянные* $c_{is}, d_{is}, s \neq i$ *такие, что* $\lambda_i(\varepsilon)$ *является простым собственным значением оператора* (2.3) *с соответствующим собственным элементом* $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i + \sum\limits_{s\neq i} c_{is}\Phi_s$ *и дефектным функционалом* $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i + \sum\limits_{s\neq i} d_{is}\Psi_s$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda_i(\varepsilon)$ - собственное значение с соответствующим собственным элементом $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ оператора (2.3). Тогда

$$\begin{aligned}&0 = (\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)})_i\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \\ &= \sum_{j\neq i} c_{ij}\left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\Phi_j(\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle\, Z_{j0} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle\, Z_{j0}\end{aligned}$$

или после применения функционалов $\Psi_{k0}, k\neq i$ к обеим частям равенства

$$\sum_{j\neq i} c_{ij}\left[\langle \Phi_j(\varepsilon), \Gamma_{k0}\rangle + \langle \left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\Phi_j(\varepsilon), \Psi_{k0}\rangle\right] = -\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{k0}\rangle\,, k\neq i. \tag{2.4}$$

Здесь в силу разложений $\Phi_s(\varepsilon) = \Phi_{s0} + O(\varepsilon)$ и $\mathcal{A}\left(\lambda_i;\varepsilon\right) = \mathcal{A}\left(\lambda_0;0\right) + O(\varepsilon)$ имеем

$$\left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\Phi_s(\varepsilon) = \left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\Phi_i(\varepsilon) +$$

$$+\left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\left(\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)\right) = \left(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\right)\left(\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)\right) =$$

$$= \left[(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0) + O(\varepsilon)\right]\left[\Phi_{s0} - \Phi_{i0} + O(\varepsilon)\right] = O(\varepsilon).$$

Так как $\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle = \langle \Phi_{i0} + O(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle = \delta_{ij} + O(\varepsilon)$, то определитель системы (2.4) отличен от нуля и поэтому она имеет единственное решение. Единственность $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

Для каждого $i = \overline{1,n}$ уравнение $(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)})_i\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = 0$ записывается в виде

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0)\,\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \mu_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) + \lambda_0\mathcal{A}_1(\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) - \sum_{j\neq i}\left\langle \tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}\right\rangle Z_{j0}.$$

С помощью регуляризатора Шмидта [7] оно сводится к системе

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \xi_i\left[I - \mu_i\Gamma\mathcal{A}(\varepsilon) - \lambda_0\Gamma\mathcal{A}_1(\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0}, \\ \xi_i = \langle \tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{i0}\rangle, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\Gamma = \left[\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0 + \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\Gamma_{i0}\rangle Z_{i0}\right]^{-1}$. Подставляя $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (2.5) строим уравнение разветвления:

$$
\begin{aligned}
&L_i\left(\mu_i,\varepsilon\right) \equiv \sum_{k+s=1}^{\infty} L_{ks}^{(i)}\mu_i^k\varepsilon^s \equiv \\
&\equiv \left\langle\left(\mu_i\mathcal{A}(\varepsilon)+\lambda_0\mathcal{A}_1(\varepsilon)\right)\left[I-\mu_i\Gamma\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda_0\Gamma\mathcal{A}_1(\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\right\rangle = 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

где в частности $L_{s0}^{(i)} = \left\langle\mathcal{A}_0\left(\Gamma\mathcal{A}_0\right)^{s-1}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\right\rangle$, $s=1,2,...,$ $L_{0k}^{(i)} =$
$= \left\langle\sum\limits_{\alpha=1}^{k}\lambda_o^\alpha\sum\limits_{k_1+k_2+\dots+k_\alpha=k}\Gamma\mathcal{A}_{k_1}\dots\Gamma\mathcal{A}_{k_\alpha}\Phi_{i0},\Gamma_{i0}\right\rangle$, $k=1,2,....$
Доказательство закончено.

Теорема 2.2. *Пусть* $N\left(\mathcal{B}_0-\lambda\mathcal{A}_0\right)=\{\Phi_i\}_1^n$, $N\left(\mathcal{B}_0^*-\lambda\mathcal{A}_0^*\right)=\{\Psi_i\}_1^n$. *При отсутствии ОЖЦ для достаточно малых* ε *существует ровно* n *простых собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)$ *(* $\lambda_i(0)=\lambda_0$ *) с соответствующими собственными элементами* $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ *и дефектными функционалами* $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$, *представимые в виде сходящегося ряда по целым степеням* ε.

Доказательство. В силу условия теоремы $L_{10}^{(i)}=\langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle\neq 0$, $i=\overline{1,n}$. Если $L_{0q}^{(i)}$ первый отличный от нуля коэффициент из последовательности $\{L_{0j}^{(i)}\}_1^\infty$, то применяя к (2.6) диаграмму Ньютона [4], определяем убывающую часть, состоящую из отрезка, соединяющего точки $(1,0)$ и $(0,q)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются рядами по степеням ε^q.
Доказательство закончено.

Теорема 2.3. *Если для каждого* $i=\overline{1,n}$ *ОЖЦ имеют длины* p_i *, причем* $\left\langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i)},\Psi_{i0}^{(1)}\right\rangle\neq 0$, *то для достаточно малых* ε *существуют ровно* $N=p_1+p_2+\dots+p_n$ *непрерывных по* ε *собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon)$ *с отвечающими им собственными элементами* $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ *, представимые сходящимися рядами по целым степеням* ε *и по степеням* $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $L_{0j}^{(i)}=0$, $j=\overline{1,\infty}$, и $L_{11}^{(i)}\neq 0$. Тогда убывающая часть диаграммы Ньютона для уравнения разветвления (2.6) состоит из отрезка соединяющего точки $(1,1)$ и $(p_i,0)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$, т.е. задача (2.2) имеет ровно $N=p_1+p_2+\dots+p_n$ собственных значений, представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Если же $L_{0j}^{(i)}=0$, $j=\overline{1,q_{i-1}}$, $L_{0q_{i-1}}^{(i)}\neq 0$ и $L_{11}^{(i)}\neq 0$, то убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из двух отрезков, один из которых соединяет точки $(1,1)$ и $(p_i,0)$, а второй точки $(1,1)$ и $(0,q_i)$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p_i-1}$, а второму отрезку в любом случае - целочисленный показатель. Следовательно, задача (2.2) имеет n собственных значений, представимых сходящимися рядами по целым степеням ε и $N-n$ собственных значений,представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, представимый сходящимся рядом по тем же степеням ε, что и соответствующий ему $\lambda_i(\varepsilon)$.
Доказательство закончено.

Замечание 2.1. *Условие теоремы* $\left\langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i)},\Psi_{i0}^{(1)}\right\rangle\neq 0$ *допускает возможность неполноты обобщенного жорданова набора* [7].

З а м е ч а н и е 2.2. *Полученные результаты обобщаются на банаховы пространства E_1, E_2 с операторами $B_0, A_0(A(\varepsilon)) \in L(E_1, E_2)$, при плотном вложении $E_1 \subset E_2 \subset H$.*

3. Уточнение собственных значений Э. Шмидта методом ложных возмущений

Теперь на основе метода регуляризации рассмотрим уточнение приближенно заданных собственных значений Шмидта и соответствующих им элементов ОЖЦ методом ложных возмущений. Результаты представлены в гильбертовых пространствах для упрощения изложения (см. замечание 2.2.).

В прямой сумме $H \oplus H$ рассмотрим спектральную задачу Э. Шмидта (2.1). Пусть для n-кратного собственного числа Шмидта λ и отвечающих ему собственных и присоединенных элементов Шмидта $\{\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_k}}, \{\tilde{\varphi}_k^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_k}}$ известны достаточно хорошие приближения $|\lambda - \lambda_0| \le \varepsilon, \|\varphi_i^{(j)} - \varphi_{i0}^{(j)}\| \le \varepsilon, \|\psi_i^{(j)} - \psi_{i0}^{(j)}\| \le \varepsilon, \|\tilde{\varphi}_i^{(j)} - \tilde{\varphi}_{i0}^{(j)}\| \le \varepsilon, \|\tilde{\psi}_i^{(j)} - \tilde{\psi}_{i0}^{(j)}\| \le \varepsilon$. Тем самым определены достаточно хорошие приближения $\lambda_0, \Phi_{k0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(j)}$ к собственному числу λ и элементам ОЖЦ $\Phi_k^{(j)}, \Psi_k^{(j)}, k = \overline{1,n}, j = \overline{1,p_k}$ соответствующих спектральных задач в прямых суммах гильбертовых пространств.

Справедлива (см. [2], [3]) лемма.

Переходя к линейным комбинациям, определяем системы

$$\{\Gamma_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,p_k}}, \Gamma_{k0}^{(l)} = A^*\Psi_{k0}^{(p_k+1-l)}, \{Z_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,p_k}}, Z_{k0}^{(l)} = A\Phi_{k0}^{(p_k+1-l)},$$

удовлетворяющие соотношениям биортогональности

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}, \ \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Производим регуляризацию

$$\overline{\mathcal{B} - t\mathcal{A}} = \mathcal{B} - t\mathcal{A} + \sum_{k=2}^{p_1} \left\langle \cdot, \Gamma_{10}^{(k)} \right\rangle Z_{10}^{(p_1+1-k)} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{p_i} \left\langle \cdot, \Gamma_{i0}^{(k)} \right\rangle Z_{i0}^{(p_1+1-k)}. \tag{3.1}$$

Согласно теореме 2.1. искомое собственное значение λ является простым фредгольмовым собственным значением оператор-функции (3.1). Более того, существуют постоянные $c_{is}, d_{is}, s = \overline{1,p_i}, i = \overline{1,n}$, такие, что соответствующие собственный элемент и дефектный функционал будут иметь вид

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_1^{(p_1)} + \sum_{i=1}^{n} c_{i1}\Phi_i + \sum_{i=2}^{n}\sum_{s=2}^{p_i} c_{is}\Phi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s}\Phi_1^{(s)},$$

$$\widetilde{\Psi} = \Psi_1 + \sum_{i=2}^{n} d_{i1}\Psi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=2}^{p_i} d_{is}\Psi_i^{(s)}. \tag{3.2}$$

В качестве начальных приближений к $\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}$ выбираем элементы $\widetilde{\Phi}_0 = \Phi_{10}^{(p_1)} - \Phi_{10}^{(p_1-1)}$, $\widetilde{\Psi}_0 = \Psi_{10}$. За начальное приближение к собственному значению λ берем решение уравнения $\left\langle (\mathcal{B} - t\mathcal{A})\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle = 0$, т.е. $\lambda_0 = \frac{\langle \mathcal{B}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \rangle}{\langle \mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \rangle}$.

Так как $\widetilde{k}_0 = \left\langle \mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle = \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \right\rangle - \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1-1)}, \Psi_{10} \right\rangle = \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \right\rangle \ne 0$, то биортогональные элементы к $\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0$ можно выбрать в виде $\widetilde{\Gamma}_0 = \frac{1}{\widetilde{k}_0}\mathcal{A}^*\Psi_{10}, \widetilde{Z}_0 = \frac{1}{\widetilde{k}_0}\mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0$.

Оператор ложного возмущения определим следующим образом:

$$\mathcal{D}_0 x = \left\langle x, \widetilde{\Gamma}_0 \right\rangle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0 + \left\langle x, (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0 \right\rangle \widetilde{Z}_0,$$

$$\mathcal{D}_0^* y = \left\langle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0, y \right\rangle \widetilde{\Gamma}_0 + \left\langle \widetilde{Z}_0, y \right\rangle (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0.$$

Тогда $\mathcal{D}_0\widetilde{\Phi}_0 = (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0$, $\mathcal{D}_0^*\widetilde{\Psi}_0 = (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0$, т.е. $N(\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}}) = \{\widetilde{\Phi}_0\}$, $N(\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0 \mathcal{A}^*}) = \{\widetilde{\Psi}_0\}$.

Изменением регуляризатора Шмидта [7] уравнение $(\overline{\mathcal{B} - t\mathcal{A}})x = 0$ сводится к системе

$$\begin{cases} x = \xi \left[I + \overline{\Gamma_0}\,(\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0)\mathcal{A})\right]^{-1} \widetilde{\Phi}_0, \\ \xi = \langle x, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle. \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\overline{\Gamma_0} = \left[\overline{\mathcal{B} - \lambda_0 \mathcal{A}} - \mathcal{D}_0 + \langle \cdot, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle \widetilde{Z}_0\right]^{-1}$.

Подстановка первого равенства во второе дает уравнение разветвления

$$F(t) \equiv 1 - \left\langle \left[I + \overline{\Gamma}_0\,(\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0)\mathcal{A})\right]^{-1} \widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Gamma}_0 \right\rangle = 0, \tag{3.4}$$

Искомое λ является простым корнем уравнения разветвления.

Тогда согласно теореме 2.1. работы [6] при достаточно хороших начальных приближений уравнение (3.4) имеет единственное решение, которое можно определить модифицированным методом Ньютона:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \left[F'(\lambda_0)\right]^{-1} F(\lambda_m),\ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

Заметим, что на каждом шаге необходимо решать одно операторное уравнение

$$\left[\overline{\mathcal{B} - \lambda_m \mathcal{A}} + \langle \cdot, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle \widetilde{Z}_0\right] x = \widetilde{Z}_0.$$

Элементы ОЖЦ $\Phi_i^{(j)}, \Psi_k^{(l)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}, l = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, m}$ определяются из следующих рекуррентных уравнений:

$$\left[\mathcal{B} - \lambda\mathcal{A} + \sum_{s=1}^{n} \langle \cdot, \Gamma_{s0} \rangle Z_{s0}\right] X = Z_{i0},\quad \left[\mathcal{B}^* - \lambda\mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^{n} \langle Z_{s0}, \cdot \rangle \Gamma_{s0}\right] Y = \Gamma_{i0},$$

$$\left[\mathcal{B} - \lambda\mathcal{A} + \sum_{s=1}^{n} \langle \cdot, \Gamma_{s0} \rangle Z_{s0}\right] X_{j,i} = \mathcal{A}X_{j-1,i} + Z_{i0},\ X_{1i} = \Phi_i,\ X_{j,i} = \Phi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{1, n};$$

$$\left[\mathcal{B}^* - \lambda\mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^{n} \langle Z_{s0}, \cdot \rangle \Gamma_{s0}\right] Y_{j,i} = \mathcal{A}^* Y_{j-1,i} + \Gamma_{i0},\ Y_{1i} = \Psi_i,\ Y_{j,i} = \Psi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{1, m}.$$

Список литературы

1. Логинов Б. В., “О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве”, *ДАН УзССР*, 1965, № 10, 5-8.

2. Логинов Б. В., Макеева О. В., “Метод ложных возмущений в применении к спектральным задачам Э.Шмидта”, *Вестник СамГУ*, серия "Математическая", № 1(5), Самара, 2007, 65-74.

3. Логинов Б. В., Макеева О. В., “Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения”, *Доклады РАН. Математика*, **419**, № 5, 2008, 160-163.

4. Макеева О. В., *Метод ложных возмущений в обобщенной задаче на собственные значения*, Кандидатская диссертация, Ульяновск, 2007, 142 с.

5. Рахимов Д. Г., “О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений”, *Жур. СВМО*, 2010, № 3, 106-112.

6. Рахимов Д. Г., “О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений”, *Вестник Самарского Государственного Университета*, Естественнонаучная серия, № 6(97), 2012, 35-41.

7. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1969.

8. Гавурин М. К., “О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений”, *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, **1**:5 (1961), 751-770.

On the perturbations in the E.Schmid's spectrum of the linear operators in Hilbert spaces.

© **D. G. Rakhimov**[2]

Abstract. In perturbation theory of discrete spectrum of Fredholm operators in the articles [5], [6] it is suggested the regularization, allowing to reduce the multiple eigenvalues cases to simple ones. In this article the regularized perturbation methods among them in pseudoperturbation aspect on M.K.Gavurin [8] are applied to E.Schmidt spectral problems.

Key Words: bifurcation theory methods, E.Schmidt spectrum, perturbation theory, branching equation,generalized Jordan chains, regularization

[2] Docent, National University of Uzbekistan,Tashkent; Davranaka@yandex.ru