УДК 517.9

Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами, просторно расположенными на 2-торах

© **Ю. А. Левченко**[1], **А. А. Шиловская**[2]

Аннотация. В работе рассматривается класс G диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A С. Смейла, заданных на трехмерных многообразиях и таких что, неблуждающее множество любого диффеоморфизма из G принадлежит объединению конечного числа двумерных поверхностей, каждая из которых является вложением двумерного тора и содержит одномерное просторно расположенное базисное множество. При естественных ограничениях на структуру пересечения инвариантных двумерных многообразий точек из таких базисных множеств, устанавливается полусопряженность любого диффеоморфизма из G модельному диффеоморфизму.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, базисное множество, полусопряженность

1. Введение и формулировка результатов

В статье рассматриваются сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f, заданные на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие *аксиоме A* С.Смейла (то есть множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$). Согласно спектральной теореме С. Смейла [14] неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных *базисных множеств*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. *Типом* базисного множества $\mathcal{B}$ называют пару неотрицательных целых чисел (a, b) таких, что $a = \dim\ W^u_x$, $b = \dim\ W^s_x$, $x \in \mathcal{B}$.

В силу [3], *нетривиальное* (отличное от периодической орбиты) базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется *поверхностным*, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой *носителем* множества $\mathcal{B}$.

Тесная взаимосвязь между топологией многообразия M^3 и динамикой рассматриваемого диффеоморфизма наблюдается тогда, когда все неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит только из поверхностных двумерных базисных множеств, а именно, в [5] доказано, то многообразие M^3 в этом случае является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор. В работах [6]-[8] выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов с поверхностными двумерными базисными множествами, для которого получена полная топологическая классификация.

В настоящей работе будем рассматривать класс А-диффеоморфизмов трехмерного многообразия, все нетривиальные базисные множества которых являются одномерными и поверхностными. Фундаментом для настоящих исследований послужили результаты по топологической классификации A-диффеоморфизмов двумерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, полученные в

[1] Младший научный сотрудник НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского; ulev4enko@gmail.com
[2] Аспирант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского; vesnann@mail.ru

работах Х. Бонатти, Р. Ланжевена, Гринеса В.З., Жирова А.Ю., Калая Х.Х., Плыкина Р.В. (для ссылок смотри, например [1], [9], [13]).

Пусть $f: M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла. Предположим, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ содержит одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ с носителем $M^2_{\mathcal{B}}$. Поскольку $\mathcal{B}$ нетривиальное базисное множество, то оно имеет тип $(1,2)$ или $(2,1)$. Для базисного множества $\mathcal{B}$ типа $(1,2)$ существуют следующие возможности:

i) $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x\in\mathcal{B}} W^u_x$;

ii) $\mathcal{B} = M^2_{\mathcal{B}} \cap (\bigcup\limits_{x\in\mathcal{B}} W^s_x)$.

Согласно [12], в случае i) базисное множество $\mathcal{B}$ является *аттрактором*, а в случае ii) — не является ни аттрактором, ни репеллером и мы называем его *седловым*. Будем называть одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ типа $(1,2)$ *канонически вложенным*, если
в случае i), W^s_x, $x \in \mathcal{B}$ пересекается с поверхностью $M^2_{\mathcal{B}}$ по единственной кривой;
в случае ii), $W^u_x \subset M^2_{\mathcal{B}}$, $x \in \mathcal{B}$.

Одномерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ типа $(2,1)$ называется *канонически вложенным* в $M^2_{\mathcal{B}}$, если оно является таковым для диффеоморфизма f^{-1}.

Пусть базисное множество $\mathcal{B}$ канонически вложено в поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$. Положим $\hat{W}^s_x = W^s_x \cap M^2_{\mathcal{B}}$ и $\hat{W}^u_x = W^u_x \cap M^2_{\mathcal{B}}$ для $x \in \mathcal{B}$. Следуя [12], множество $\mathcal{B}$ назовем *просторно расположенным* на $M^2_{\mathcal{B}}$, если для различных точек $x, y \in \mathcal{B}$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x,y]^s \subset \hat{W}^s_x$ и $[x,y]^u \subset \hat{W}^u_x$ не гомотопна нулю на $M^2_{\mathcal{B}}$.

Когда носитель просторно расположенного базисного множества состоит из двумерных торов, будем обозначать его $T^2_{\mathcal{B}}$. Топология объемлющего многообразия M^3 в этом случае уточняется следующим образом.

Обозначим через $M_{\widehat{J}}$ — мноогообразие, являющееся фактор-пространством, полученным из $T^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(\widehat{J}(z),0)$, где $\widehat{J}$ — алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей J, которая либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

В [11] доказано следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [2], [10].

Предложение 1.1. *Пусть $f: M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A, заданный на замкнутом, неприводимом, ориентируемом трехмерном многообразии M^3, неблуждающее множество которого содержит одномерное просторно расположенное на $T^2_{\mathcal{B}}$ базисное множество. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$.*

Будем рассматривать класс G A-диффеоморфизмов $f: M^3 \to M^3$ со следующими свойствами:

1) неблуждающее множество f содержит непустое множество $\mathbb{B}$ просторно расположенных базисные множеств;

2) $M^2_{\mathcal{B}} = T^2_{\mathcal{B}}$ для любого $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$;

3) $NW(f) \subset (\bigcup\limits_{\mathcal{B}\in\mathbb{B}} T^2_{\mathcal{B}})$;

4) для любой точки x базисного множества $\mathcal{B}_1 \in \mathbb{B}$ типа $(1,2)$ $((2,1))$ существует точка y базисного множества $\mathcal{B}_2 \in \mathbb{B}$ типа $(2,1)$ $((1,2))$ такая, что каждая компонента связности пересечения $W^s_x \cap W^u_y$ $(W^u_x \cap W^s_y)$ является открытой дугой, имеющей в точности

две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{B}_1$, другая $\mathcal{B}_2$, при этом объединение замыканий всех таких дуг определяет f-инвариантную одномерную ламинацию на многообразии M^3.

Следуя [4] введем класс Φ модельных диффеоморфизмов следующим образом. Представим многообразие $M_{\widehat{J}}$ как пространство орбит $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (\widehat{J}(z), r - 1)$. Обозначим через $p_{\widehat{J}} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_{\widehat{J}}$ естественную проекцию.

Пусть $C \in SL(2, \mathbb{Z})$ гиперболическая матрица такая, что $CJ = JC$. Для $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\psi_{n,k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени потока $\dot{r} = sin\, 2\pi nkr$. Для $k = 1$ положим $l = 0$ и для $k > 1$ пусть $l \in \{1, \dots, k - 1\}$ натуральное число, взаимно простое с k. Обозначим через $\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$. Положим $\varphi_{n,k,l} = \psi_{n,k}\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}(z, r) = (\widehat{C}(z), \varphi_{n,k,l}(r))$, где $\widehat{C}$ — гиперболический автоморфизм тора. Непосредственно проверяется, что $\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}\gamma = \gamma\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}$, откуда следует, что отображение $\varphi_{C,n,k,l} : M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$, заданное формулой $\varphi_{C,n,k,l} = p_{\widehat{J}}\tilde{\varphi}_{C,n,k,l}p_{\widehat{J}}^{-1}$, где $p_{\widehat{J}}^{-1}(x)$ полный прообраз точки x, является диффеоморфизмом. Обозначим через Φ множество таких диффеоморфизмов.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ полусопряжен некоторому диффеоморфизму $\varphi \in \Phi$.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-00672 и 13-01-12452-офи-м). Авторы также благодарят В. З. Гринеса за постановку задачи и О. В. Починку за плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Bonatti Ch., Langevin R., *Diffeomorphismes de Smale des surfaces. Asterisque.*, Societe mathematique de France, Paris, 2011, 250 c.

2. Гринес В. З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.

3. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.

4. V.Z. Grines, Yu.A. Levchenko, O.V. Pochinka., “On a topological classification of diffeomorphisms on 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers.”, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2014 will be published.

5. Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А., “О структуре 3-многообразия, допускающего A-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством”, *Труды СВМО*, **12**:2 (2010), 7–12.

6. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами.”, *Труды СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов”, *Труды СВМО*, **14**:2 (2012), 48–57.

8. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.

9. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 438 с.

10. Hertz F., Herts M., Ures R., “Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds”, *Journal of modern dynamics*, **5**:1 (2011), 185–202.

11. Левченко Ю.А., “О структуре трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы с одномерными базисными множествами.”, *Труды СВМО*, **15**:1 (2013), 71–76.

12. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.

13. Плыкин Р. В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *Успехи мат. наук*, **35**:3 (1980), 94–104.

14. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

Diffeomorphisms on 3-manifolds with 1-dimensional basic sets which are spaciously situated on 2-torus

© **Y. A. Levchenko**[3], **A. A. Shilovskaya**[4]

Abstract. We consider the class G of diffeomorphisms satisfying Smale's Axiom A on 3-manifolds, such that the nonwandering set of any diffeomorphism from G belongs to the finite union of surfaces. Every surface is an embedding of torus and contains a one-dimensional spaciously situated basic set. Under certain restrictions on the structure of intersection of two-dimensional invariant manifolds of points from this basic sets, it is established the semiconjugacy of any diffeomorphism from G to a model diffeomorphism.

Key Words: A-diffeomorphism, basic set, semiconjugacy

[3] research associate, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com.

[4] graduate student of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; vesnann@mail.ru