*УДК 512.917+513.9*

# Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей

**© М. И. Малкин**[1]

**Аннотация.** Рассматриваются счетные топологические марковские цепи, вообще говоря, нетранзитивные. Показано, что неблуждающее множество отображения сдвига на компактификации пространства орбит представляется в виде несвязной суммы неблуждающих множеств транзитивных компонент плюс, возможно, одна устойчивая неподвижная точка — символическая бесконечность. В качестве следствия получен результат об аппроксимации топологической энтропии разложимой счетной топологической марковской цепи.

**Ключевые слова:** топологические марковские цепи, топологическая энтропия, отображение сдвига

## 1. Введение

Топологические марковские цепи (ТМЦ) существенно используются в качестве символических моделей для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы; дело в том, что фазовое пространство таких систем обычно допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие акиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [7], [2], [6] ). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения $f$ интервала $I$ с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ $(\Omega_A, \sigma)$ с матрицей переходов $A$, такую, что $f : I \to I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \to \Omega_A$ (точнее говоря, сопряженность имеет место для всех точек, кроме, возможно, так называемого «малого множества», т.е. такого множества, которое не содержит периодических точек и обладает тем свойством, что для любой сосредоточенной на нём инвариантной меры энтропия Колмогорова-Синая равна нулю). Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, пространство $\Omega_A$ счетной ТМЦ некомпактно и поэтому здесь возникают серьезные проблемы при обобщении важных топологических и эргодических результатов теории марковских цепей, в частности теории Перрона-Фробениуса. В случае сложных систем с неравномерно гиперболической или частично гиперболической структурой спектральное разложение неблуждающего множества на транзитивные компоненты может оказаться бесконечным, и тогда предельное поведение системы, вообще говоря, не сводится к изучению поведения на транзитивных компонентах. Аналогичная ситуация имеет место для ТМЦ. Для неразложимой бесконечной матрицы переходов $A$ соответствующая ТМЦ топологически транзитивна,

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; malkin@unn.ru

и в этом случае, как показали Д. Вер-Джонс и Б.М. Гуревич (см. [12], [10], [11]) удается частично обобщить результаты теории Перрона-Фробениуса.

В данной статье рассматриваются счетные ТМЦ с разложимыми матрицами переходов $A$. В этом случае динамическая система $(\Omega_A, \sigma))$ нетранзитивна и поэтому, в силу некомпактности пространства $\Omega_A$, могло, априори, оказаться так, что неблуждающее множество компактификации данной системы содержит, кроме неблуждающих точек транзитивных компонент, еще и точки, аккумулирующиеся на бесконечности. В таком случае возникали бы серьезные проблемы из-за усложнения структуры предельных орбит и, соответственно, проблемы с аппроксимацией топологической энтропии и инвариантных мер. Как показывет основной результат данной статьи (теорема 2.1.), на самом деле неблуждающее множество отображения сдвига на компактификации пространства орбит представляется в виде несвязной суммы неблуждающих множеств транзитивных компонент плюс, возможно, одна устойчивая неподвижная точка — символическая бесконечность. В качестве следствия получен результат об аппроксимации топологической энтропии разложимой счетной топологической марковской цепи.

## 2. Разложение неблуждающего множества счетной ТМЦ

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика $\rho$ на пространстве $\Omega_A$ вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \mid \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \mid . \tag{2.1}$$

ТМЦ $(\Omega_A, \sigma)$ есть топологическое (метрическое) пространство $\Omega_A$, на котором действует отображение сдвига $\sigma\colon \Omega_A \to \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика $\rho$ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство $\Omega_A$ некомпактно. Чтобы компактифицировать $\Omega_A$, рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом $\infty$, т.е. $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \bigcup \{\infty\}$. Метрика на $\overline{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n, m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства $\Omega_A$ в $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\overline{\Omega}_A = Clos(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\overline{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика $\rho$, задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\overline{\Omega}_A$ является $\sigma$-инвариантным.

Следующий результат следует непосредственно из определений пространств $\Omega_A$ и $\overline{\Omega}_A$.

**Лемма 2.1.** *Любое открытое множество $G \subset \overline{\Omega}_A$ можно представить в виде конечного или счетного объединения непересекающихся цилиндров из $\overline{\Omega}_A$. То же самое утверждение справедливо при замене $\overline{\Omega}_A$ на $\Omega_A$.*

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что $A$ — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы

$A$ определены (конечны) все положительные степени, т.е. $A^k$, i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых $i, j, k$. Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы $A$ с индексным множеством $I$. Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1,2,\dots,n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k,k+1,\dots\}}$.

Матрица $A$ называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число $k$ такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица $A$ разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [8]), доказывается, что неразложимость матрицы $A$ эквивалентна транзитивности системы $(\Omega_A, \sigma)$. Для неразложимой матрицы $A$ обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов $\mathbf{N}$ можно разбить на $d$ подмножеств $I_1, I_2, ...I_d$ так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s - t)\mathbf{mod}\ d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига $\sigma$ на компактификации $\overline{\Omega}_A$. Для конечной матрицы $B$ обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|\Omega_B)$. Б.М. Гуревич показал (см. [10], [11]), что для неразложимой матрицы $A$ существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \bigcup J_n = \mathbf{N} \tag{2.2}$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n). \tag{2.3}$$

В качестве следствия из основного результата данной статьи мы покажем, что равенство $h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы $A$ и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N} \colon \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через $A_i$. Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества $\Omega_{A_i}$ в пространстве $\overline{\Omega}_A$. Легко показать, что для бесконечной разложимой матрицы $A$ неблуждающее множество $NW(\sigma|\Omega_A)$ (очевидно, некомпактное) представляется в виде объединения орбит транзитивных компонент:

$$NW(\sigma|\Omega_A) = \bigcup_i NW(\sigma|\Omega_{A_i}) = \bigcup_i \Omega_{A_i}.$$

Для понимания поведения предельных орбит ТМЦ (и в частности, для оценки топологической энтропии, инвариантных мер) требуется найти разложение неблуждающего множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$. Следующая теорема показывает, что, подобно некомпактифицированной ТМЦ, неблуждающее множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ обладает аналогичным спектральным разложением. В формулировке и доказательстве теоремы мы используем обозначение $(\infty) = (\dots\infty\infty\infty\dots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$.

**Теорема 2.1.** *Неблуждающее множество отображения сдвига $\sigma$ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

*где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех $i$, и $P = \emptyset$ в противном случае.*

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на отдельные утверждения.

(1) Если $\underline{x} = (x_n) \in \overline{\Omega}_A$ и $x_{n_0} \neq \infty, x_{n_1} \neq \infty$ для некоторых $n_0 < n_1$, то $x_n \neq \infty$ при всех $n, n_0 \leq n \leq n_1$. Действительно, в противном случае найдется $n_2, n_0 < n_2 < n_1$ такое, чтоh $x_{n_2} = \infty$. Отсюда следует, что существует последовательность $\underline{y}^{(m)} = (y_n^{(m)}) \in \Omega_A$ такая, что

$$y_{n_0}^{(m)} = x_{n_0}, y_{n_1}^{(m)} = x_{n_1} \text{ для всех } m > 0; \text{ и } \lim_{m\to\infty} y_{n_2}^{(m)} = \infty.$$

Поэтому найдется бесконечное множество различных значений $y_{n_2}$, для которых $a_{x_{n_0},y_{n_2}}^{(n_2-n_0)} > 0$, $a_{y_{n_2},x_{n_1}}^{(n_1-n_2)} > 0$, и, значит, $a_{x_{n_0},x_{n_1}}^{(n_1-n_0)} = \infty$. Но это противоречит условию конечности всех положительных степеней матрицы $A$.

Таким образом, точки $\underline{x} \in \overline{\Omega}_A \setminus \Omega_A$ могут иметь одну из следующих форм:
a) $\underline{x} = (\ldots, \infty, \infty, \infty, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$, т.е. $x_n = \infty$ при $n < n_0$, $x_n < \infty$ при $n \geq n_0$;

b) $\underline{x} = (\ldots, x_{n_1-1}, x_{n_1}, \infty, \infty, \infty, \ldots)$, т.е. $x_n < \infty$ при $n \leq n_1$, $x_n = \infty$ при $n > n_1$;
c) $\underline{x} = (\ldots, \infty, \infty, x_{n_0}, \ldots, x_{n_1}, \infty, \infty, \ldots)$, т.е. $x_n = \infty$ при $n < n_0$ и при $n > n_1$, $x_n < \infty$ при $n_0 \leq n \leq n_1$.

(2) Если $\underline{x} = (x_n) \in \overline{\Omega}_A$ и $x_{n_0} = x_{n_1} \neq \infty$ для некоторых $n_0 < n_1$, то $I(x_n) = I(x_{n_0}) \neq \emptyset$ при всех $n, n_0 \leq n \leq n_1$.

Действительно, данное утверждение следует из (1) и определения индексного множества $I(i)$.

(3) Для всех $i$ выполняется $NW(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i}) = \overline{\Omega}_{A_i}$.

Действительно, данное утверждение следует из включений:

$$NW(\sigma|\Omega_{A_i}) \supset \overline{Per(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i})} \supset \overline{Per(\sigma|\Omega_{A_i})} = \overline{\Omega}_{A_i},$$

где $Per$ обозначает множество периодических точек, а замыкание рассматривается в пространстве $\overline{\Omega}_A$.

(4) $(\infty) \in \overline{\Omega}_A$.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим последовательность $\underline{x}^{(m)} = (x_n^{(m)}) \in \Omega_A$ такую, что $x_0^{(m)} = m$ при всех $m > 0$ ( такая последовательность существует, поскольку матрица $A$ не содержит ни нулевых строк, ни столбцов). Для предельной точки $\underline{y} = (y_n) \in \overline{\Omega}_A$ этой последовательности имеем: $y_0 = \infty$. Тогда из утверждения (1) следует, что либо $y_n = \infty$ при всех $n \leq 0$, либо $y_n = \infty$ при всех $n \geq 0$. Поэтому либо $\sigma^{-k}(\underline{y})$, либо $\sigma^k(\underline{y})$ стремится к $(\infty)$ при $k \to +\infty$.

Теперь мы можем доказать утверждение теоремы. Возьмем произвольную точку $\underline{x} \in NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) \setminus (\infty)$ и целое число $l$ такое, что $x_l \neq \infty$. Для любого натурального $m$ рассмотрим окрестность $U_m$ точки $\underline{(x)}$, задаваемую следующим образом: $U_m = \{\underline{y} = (y_n) \in \overline{\Omega}_A \colon$ если для данного $n, l - m \leq n \leq l + m$, выполняется $x_n \neq \infty$, то $y_n = x_n$; в противном случае $y_n > m\}$.

Поскольку точка $\underline{x}$ неблуждающая, существуют число $k_m > m$ и точка $\underline{y}^{(m)} = (y_n^{(m)}) \in U_m \bigcap \sigma^{-k_m}(U_m)$. Тогда $y_l^{(m)} = x_l, y_{l+k_m}^{(m)} = x_l$ и в силу утверждения (2), $y_n^{(m)} \in I(x_l)$ при всех $n, l \le n \le l + k_m$. Возьмем точку $\underline{z}^{(m)} = (z_n^{(m)}) \in \Omega_{A_{x_l}}$ такую, что

$$z_n^{(m)} = \begin{cases} y_n^{(m)} & \text{при } l \le n \le l+m \\ y_{n+k_m}^{(m)} & \text{при } l-m \le n \le l \end{cases}$$

Очевидно, $\lim_{m\to\infty} \underline{z}^{(m)} = \underline{x}$, и поэтому $\underline{x} \in \overline{\Omega}_{A_{x_l}}$. So we have

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) \subset (\bigcup_i \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup (\infty)$$

Оставшаяся часть доказательства формулы из утверждения теоремы очевидно следует из пунктов (3) и (4).
Доказательство закончено.

В качестве следствия получим результат, обобщающий для нетранзитивных ТМЦ теорему Гуревича об аппроксимации топологической энтропии.

**Следствие 2.1.** *Для счетной ТМЦ с разложимой матрицей $A$ (possible reducible) выполняется*

$$h(A) = \sup_i h(A_i) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n).$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [1]), что для непрерывного отображения $T\colon X \to X$ компакта $X$, который представляет собой объединение инвариантных замкнутых подмножеств (т.е $\bigcup X_\alpha = X$, $TX_\alpha \subset X_\alpha$ при всех $\alpha$), имеет место формула $h(T) = \sup_\alpha h(T|X_\alpha)$. Поэтому в силу теоремы 2.1. и очевидного равенства $h(\sigma|(\infty)) = 0$ получаем:

$$h(\sigma|NW(\sigma|\overline{\Omega}_A)) = \sup_i h(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i}) = \sup_i h(A_i).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует неразложимая подматрица submatrix $A_i$, такая, что $h(A_i) > h(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Если индексное множество $I(i)$ конечно, то $h(A|_n) \ge h(A_i)$ для достаточно больших large $n$. Если же множество $I(i)$ бесконечно, то по теореме Гуревича можно найти конечное подмножество $J \subset I(i)$ такое, что $h(A|_J) > h(A_i) - \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ для достаточно большого $n$, и, следовательно, $h(A|_n) \ge h(A|_J) > h(A) - \varepsilon$.
Доказательство закончено.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 13-01-00589.

## Список литературы

1. R. Bowen, “Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms”, *Lecture Notes Math.*, **470** (1975).

2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai, “Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards”, *Uspekhi Matem. Nauk*, **45** (1990), 97–134.

4. Y. Guivarch, J. Hardy, “Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d’Anosov”, *Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73–98.

5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213–236.

6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131–139.

7. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150–212.

8. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

9. M.-C.Li, M.Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

10. Б.Н. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715–718.

11. Б.Н. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *ДАН СССР*, **192** (1970), 963–965.

12. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361–386.

# Decomposition of non-wandering set for non-transitive countable topological Markov chains

© **M. I. Malkin**[2]

**Abstract.** We consider the counting topological Markov chain, in general, non-transitive. It is shown that non-wandering set of the map shift by shrinking space orbits is represented as a disjoint union of non-wandering set of transitive component plus perhaps one stable fixed point – symbolic infinity. As a corollary, we obtain the result of the approximation topological entropy decomposable countable topological Markov chain.

**Key Words:** topological Markov chains, topological entropy, shift map

[2] Associate Professor, Department of Differential Equations and Mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State Lobachevsky Universit, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru.