УДК 519.63:517.958

О способе решения задачи нестационарной диффузии радона в кусочно-анизотропных средах

© **А. Р. Бикбаева**[1]**,В. Н. Кризский**[2]

Аннотация. В работе построена математическая модель диффузии радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: диффузия радона, анизотропная среда, краевая задача, метод интегральных преобразований и интегральных представлений, преобразование Лапласа.

1. Введение

Радон из-за специфических особенностей является индикатором при различных геологических и геотехнических исследованиях. Динамические изменения концентрации радона в приповерхностном слое почвы отражают динамические изменения напряженно-деформированного состояния горного массива в значительном объеме, что служит основой для исследования поля вариаций эксгаляции радона как краткосрочного предвестника сейсмических событий [1]. В геологии изотопы радона используются для поиска урановых и ториевых руд, а также для геологического и экологического картирования, поиска нефтяных месторождений.

Изучение процессов распределения радона в грунте связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка алгоритмов решения подобного типа задач и программ расчета данных имеет практическое значение во многих научных направлениях: сейсмология, геохимия, разведочная геофизика и т.д.

2. Постановка задачи и способ решения

Без ограничений общности рассуждений будем рассматривать горизонтально-слоистую модель среды с локальными включениями, отражающую типовую структуру нефтеносного района.

Пусть горизонтально-слоистая среда разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{0.0}, \gamma_{1.0}, \ldots, \gamma_{N-1.0}$ на горизонтальные слои $\Omega_{0.0}, \Omega_{1.0}, \ldots, \Omega_{N.0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которого описываются симметричными тензорами $D_{0.0}, D_{1.0}, \ldots, D_{N.0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i.0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i.j}(j = \overline{1, M_i})$ с границами $\Omega_{i.j}$, заполненных веществом, физические свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$.

[1] Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

[2] Зам. директора по научной работе и инновациям, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.

Математическая модель переноса радона в области исследования $\mathbf{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{N} \bigcup_{j=1}^{M_i} \Omega_{i.j} \subset \mathbb{R}^3$ может быть представлена начально-краевой задачей вида:

$$\frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.j}\overline{\nabla} A_{i.j}(P,t)) - \lambda(A_{i.j}(P,t) - A_{i.\infty}), P \in \Omega_{i.j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}; \quad (2.1)$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla} A_{i+1.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.2)$$

$$A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.3)$$

$$(D_{i.j}\overline{\nabla} A_{i.j}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = (D_{i.0}\overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}; \quad (2.4)$$

$$A_{i.j}(P,t)|_{\gamma_{i.j}} = A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}; \quad (2.5)$$

$$\lim_{z\to\infty} A_{N.0}(P,t) = A_{N.\infty}, \lim_{z\to-\infty} A_{0.0}(P,t) = 0; \lim_{P\to\infty, z=const} A_{i.0}(P,t) = A_{\text{н}_i}(P,t), i = \overline{0,N}; \quad (2.6)$$

$$A_{i.j}(P,0) = 0, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}. \quad (2.7)$$

Здесь $A_{i.j}(P,t)$ – объемная активность радона в грунте, $P(x,y,z)$; λ – постоянная распада радона; $A_{i.\infty}$ – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) на заданной глубине в грунте i-го слоя, которая равна $A_{i.\infty} = K_{i.em}A_{i.Ra}\rho_{i.s}(1-\eta_i))$, $K_{i.em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i.Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra, $\rho_{i.s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_{\text{н}_i}(P,t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

Представим искомую функцию объемной активности радона в грунте $A_{i.j}(P,t)$ в виде суммы двух вспомогательных функций аномального $\overline{A}_{i.j}(P,t)$ и нормального $A_{\text{н}_i}(P,t)$ полей, т.е.

$$A_{i.j}(P,t) = \overline{A}_{i.j}(P,t) + A_{\text{н}_i}(P,t), i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i},$$

где нормальное поле радона определяется краевой задачей:

$$\frac{\partial A_{\text{н}_i}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t)) - \lambda(A_{\text{н}_i}(P,t) - A_{i.\infty}), P \in \Omega_{i.0}, i = \overline{0,N}; \quad (2.8)$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_{i+1}}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.9)$$

$$A_{\text{н}_i}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{\text{н}_{i+1.0}}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.10)$$

$$\lim_{z\to\infty} A_{\text{н}_N}(P,t) = A_{\infty}, \lim_{z\to-\infty} A_{\text{н}_0}(P,t) = 0; \quad (2.11)$$

$$A_{\text{н}_i}(P,0) = 0, i = \overline{0,N}. \quad (2.12)$$

Численное решение задачи (2.8) – (2.12) в случае кусочно-однородной горизонтально-слоистой среды с плоскими границами получено в [2].

С учетом задачи (2.8) – (2.12) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial \overline{A}_{i.j}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.j}\overline{\nabla A}_{i.j}(P,t)) - \lambda\overline{A}_{i.j}(P,t), P \in \Omega_{i.j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}; \quad (2.13)$$

$$((D_{i.0}\overline{\nabla A}_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = ((D_{i+1.0}\overline{\nabla A}_{i+1.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.14)$$

$$\overline{A}_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = \overline{A}_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.15)$$

$$((D_{i.j}\overline{\nabla A}_{i.j}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = [(D_{i.0}\overline{\nabla A}_{i.0}(P,t), \overline{n}) + \psi_{i.0}(P)]|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}, \quad (2.16)$$

$$\psi_{i.0}(P) = ((D_{i.0} - D_{i.j})\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t), \overline{n});$$

$$\overline{A}_{i.j}(P,t)|_{\gamma_{i.j}} = \overline{A}_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N}, j=\overline{1,M_i}; \tag{2.17}$$

$$\lim_{P\to\infty} \overline{A}_{i.0}(P,t) = 0, i=\overline{0,N}, \overline{A}_{i.j}(P,0) = 0, i=\overline{0,N}, j=\overline{0,M_i}. \tag{2.18}$$

Применим к задаче (2.13) – (2.18) способ решения, описанный в работе [3], используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P,s) = \int\limits_0^\infty A(P,t)e^{-st}dt. \tag{2.19}$$

Получим следующую краевую задачу:

$$div(D_{i.j}\overline{\nabla}F_{i.j}(P,s)) - (s+\lambda)F_{i.j}(P,s) = 0, P\in\Omega_{i.j}, i=\overline{0,N}, j=\overline{0,M_i}; \tag{2.20}$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla}F_{i.0}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla}F_{i+1.0}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.21}$$

$$F_{i.0}(P,s)|_{\gamma_{i.0}} = F_{i+1.0}(P,s)|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.22}$$

$$(D_{i.j}\overline{\nabla}F_{i.j}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = [(D_{i.0}\overline{\nabla}F_{i.0}(P,s),\overline{n} + F_{\psi_{i.0}}(P)]|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N-1}, j=\overline{1,M_i}, \tag{2.23}$$

$$F_{\psi_{i.0}}(P) = ((D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}F_{\text{н}_i}(P,s),\overline{n});$$

$$F_{i.j}(P,s)|_{\gamma_{i.j}} = F_{i.0}(P,s)|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N}, j=\overline{1,M_i}; \tag{2.24}$$

$$\lim_{P\to\infty} F_{i.j}(P,s) = 0, i=\overline{0,N}, \tag{2.25}$$

где функция $F_{\psi_{i.0}}(P)$ – образ функции $\psi_{i.0}(P)$ при преобразовании (2.19).

Для решения задачи (2.20) – (2.25) рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина $G(P,Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q,y_q,z_q)$ и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$div(D_{i.0}\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q)) - (s+\lambda)G_{i.0}(P,Q) = -\delta(P,Q), P\in\Omega_{i.0}, i=\overline{0,N}; \tag{2.26}$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla}G_{i+1.0}(P,Q),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.27}$$

$$G_{i.0}(P,Q)|_{\gamma_{i.0}} = G_{i+1.0}(P,Q)|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.28}$$

$$\lim_{P\to\infty} G_{i.j}(P,Q) = 0, i=\overline{0,N}. \tag{2.29}$$

Интегральное представление задачи (2.20) – (2.25) будет иметь вид:

$$F(P,s) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}} F_{i.j}(Q,s)[(D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n_Q})]d\gamma_{i,jQ} + \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}} F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P,Q)d\gamma_{i,jQ}.$$

Здесь $\overline{n}_Q$ – вектор внешней нормали к границе включения в точке Q, а граничные значения функции $F_{i.j}(Q,s)$ находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$F(P,s) - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}} F_{i.j}(Q,s)[(D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n}_Q]d\gamma_{i.jQ} = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}} F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P,Q)d\gamma_{i.jQ}.$$

Обращение преобразования Лапласа (2.19) программно реализуется с помощью обобщенных квадратурных формул наивысшей степени точности [4].

Список литературы

1. Уткин В. И., “Газовое дыхание Земли”, *Соросовский образовательный журнал*, 1997, № 1, 57–64.

2. Яковлева В. С., Паровик Р. И., “Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1(2), 45–55.

3. Кризский В. Н., “О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля”, *Вестник Башкирского университета*, **14**:4 (2009), 1302–1306.

4. Матвеева Т. А., *Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения*, дисс. . . . канд. физ.-мат. наук, С.-П., 2003, 117 с.

About the method of the solution problem of non-stationary diffusion of radon in piecewise and anisotropic media

© A. R. Bikbaeva[3],V. N. Krizsky[4]

Abstract. In the work the mathematical model of diffusion of radon in layered anisotropic media with anisotropic inclusions which represents a boundary problem of mathematical physics of parabolic type is constructed.The combined method of the solution problem on the basis of methods of integral transformations, integral representations and the boundary integral equations is offered.
Key Words: diffusion of radon, anisotropic media, boundary problem, method of integral transformations and integral representations, Laplace transform.

[3] Assistant to Chair of Mathematical Modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

[4] Deputy director for scientific work and innovations, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.