УДК 517.938

Об одной модели быстрого кинематического динамо

© Е. В. Жужома[1] , В. С. Медведев[2], А. Е. Шишенкова[3]

Аннотация. В статье строится диффеоморфизм, имеющий положительную энтропию и сохраняющий объем, трехмерной сферы. При этом, в пространстве консервативных диффеоморфизмов имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию.

Ключевые слова: Топологическая энтропия, консервативный диффеоморфизм, кинематическое динамо, динамика магнитных полей

Предметом теории кинематического динамо является происхождение магнитных полей в электропроводящих средах, которые играют большую роль в динамике астрофизических процессов [3]. Одним из аспектов быстрого кинематического динамо является изучение движений жидкости, которые вызывают экспоненциальный рост магнитного поля при малой магнитной диффузии [2]. В упрощенной форме вопрос сводится к существованию консервативного диффеоморфизма $f : M \to M$ риманова многообразия M такого, что энергия магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$, заданного на M, растет экспоненциально под действием итераций диффеоморфизма f. При этом предполагается, что магнитная вязкость, входящая в соответствующее уравнение диффузии, достаточно близка к нулю, и мы также должны учитывать процесс рассеивания магнитного поля, которое формально представляется как решение уравнения диффузии. Для типичных магнитных полей известно, что условия, связанные с диффузией (при малой магнитной вязкости) выполняются, если диффеоморфизм f достаточно хаотичен (например, имеет ненулевую топологическую энтропию) [7].

В статье строится диффеоморфизм, имеющий положительную энтропию и сохраняющий объем, трехмерной сферы. При этом, в пространстве консервативных диффеоморфизмов имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию.

Рассмотрим на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, и отображение $w : D^2 \to \mathbb{R}^2$, образующее подкову Смейла [10]. Именно, отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy.

Известно [1], [9], что w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2. Ясно, что за счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равнялся $\frac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x; y) \longrightarrow (x + \frac{1}{2}; y)$ вдоль оси Ox, и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – центральную симметрию относительно начала координат $(0; 0)$, $S_0(x; y) = (-x; -y)$. Снова за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

[1] Профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] Старший научный сотрудник кафедры математического анализа, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru

[3] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2. $w(D^2) \cap (S_0 \circ w(D^2)) = \emptyset$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0. Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases} \bar{x} &= x\cos\pi t - y\sin\pi t \\ \bar{y} &= x\sin\pi t + y\cos\pi t \end{cases}$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \tan\pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to [0;1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t\ mod,\ 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два [8]. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$, и отображение $F : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ вида

$$(t;(x;y)) \longmapsto (E_2(t); w_t(x;y)), \qquad t \in S^1, \quad (x;y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}^2_t = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F,

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}^2_{E_2(t)} = \mathbb{R}^2_{2t\, mod\, 1}.$$

Л е м м а 1.6. *Отображение $F : S^1 \times D^2 \to F(S^1 \times D^2)$ является диффеоморфизмом на свой образ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $F(t_1; z_1) \cap F(t_2; z_2) \neq \emptyset$. Тогда $F(D_{t_1}) \cap F(D_{t_2}) \neq \emptyset$. Из определения F вытекает равенство $E_2(t_2) = E_2(t_1)$, то есть, $2t_1\ mod\ 1 = 2t_2$. Так как отображение w_t является диффеоморфизмом на свой образ, то $t_1 \neq t_2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$. Имеем, $F(D_{t_1}) = R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1}(D_{t_1})$,

$$F(D_{t_2}) = F(D_{t_1+\frac{1}{2}}) = R_{2t_1+1} \circ w_0 \circ R_{-t_1-\frac{1}{2}}(D_{t_1}) = R_1 \circ R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1-\frac{1}{2}}(D_{t_1}).$$

Поскольку R_1 есть поворот на угол π, то подковы $F(D_{t_1})$ и $S_0 \circ F(D_{t_1})$ должны пересекаться, что противоречит условию 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\frac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ. Стандартным образом пополним пространство $\mathbb{R}^3$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что объединение $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ отождествляется с 3-мерной сферой S^3.

Из техники, развитой в работах [4], [5], вытекает, что f продолжается до диффеоморфизма сферы $f : S^3 \to S^3$, причем можно продолжение осуществить так, чтобы сохранялось свойство консервативности.

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в S^3, будем называть *базовым*, и обозначим через $\mathcal{B}$. Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [1] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [**??**]. Обозначим через $Diff^1(S^3)$ пространство диффеоморфизмов 3-сферы S^3, наделенное C^1 топологией.

Л е м м а 1.7. *Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_\Omega$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $Diff^1(S^3)$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_\Omega$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению, якобиан отображения $f|_\mathcal{B} : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ равен $J(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому f имеет гиперболическую структуру (не только на Ω) на $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что множество Ω гиперболическое. Известно, что ограничение $f|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega_0$ имеет положительную энтропию [1]. Отсюда и [6] вытекает, что ограничение $f|_\Omega$ также имеет положительную энтропию. Поскольку гиперболические множества обладают устойчивостью относительно малых C^1 возмущений, то существует окрестность $U(f)$ с требуемыми свойствами, так как энтропия является инвариантом сопряженности.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В заключение рассмотрим на $S^1 \times D^2$ магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}$, образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ можно продолжить на всю сферу S^3 до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ имеет нулевую диффузию (то есть, рассеивание магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются в два раза, то под действием f поле $\vec{\boldsymbol{B}}$ переходит в поле $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ имеют длину не менее, чем в λ раз большую нежели длина векторов поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{\boldsymbol{B}})$ относительно поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$. Если не учитывать диссипацию энергии, то отсюда следует, что энергия векторного поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$ растет экспоненциально с показателем $\ln\lambda > 0$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \to S^3$ является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. С другой стороны, в работе [7] доказано, что для типичных магнитных полей с ненулевой (топологической) энтропией энергия также растет экспоненциально с учетом диссипации энергии при неограниченно большом магнитном числе Рейнольдса (т.е., при сколь угодно малой магнитной вязкости). Отсюда и леммы 1.7. следует, что существует близкий к f (в C^1 топологии) диффеоморфизм $f_0 : S^3 \to S^3$, который является быстрым (диссипативным) кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Авторы благодарят РФФИ, грант 12-01-00672-а, за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Аносов Д.В., Солодов В.В., "Гиперболические множества. В сб. серии «Современные проблемы математики»", *Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **66** (1991), 12–99.

2. Арнольд В.И., Хесин Б.А., *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.

3. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., "О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы "динамо")", *Успехи физ. наук*, **106** (1972), 431–457.

4. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., "О нульмерных соленоидальных базисных множествах", *Матем. сб.*, **202 3** (2011), 47–68.

5. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

6. Bowen R., "Topological entropy and Axiom A.", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.

7. Klapper I., Young L.-S., "Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy", *Comm. Math. Phys.*, **173** (1975), 623–646.

8. Shub M., "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

9. Smale S., "Diffeomorphisms with many periodic points", *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.

10. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.

A model of fast kinematic dynamo

© E.V. Zhuzhoma[4], V.S. Medvedev[5], A. E. Shishenkova[6]

Abstract. We construct a diffeomorphism having a positive entropy, and the stored volume, three-dimensional sphere. Thus, in the space conservative diffeomorphisms of a neighborhood in which the diffeomorphisms have positive topological entropy.

Key Words: Topological entropy, a conservative diffeomorphism, kinematic dynamo, dynamics of magnetic fields

[4] Professor of mathematical analysis, theory and methodology of training, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[5] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

[6] Assistant professor of department of higher mathematic, Agriculture Academy of Nizhniy Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru