

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 551.51+519.6

Описание математической модели переноса радиоактивных примесей по воздуху и подземными водами© Е. Н. Панюшкина¹

Аннотация. Моделирование динамики распределения концентраций вредных веществ имеет большое значение при устранении последствий чрезвычайных ситуаций, а также при определении потенциально опасных зон заражения. В статье приводится описание математической модели переноса радиоактивных примесей в атмосфере и подземными водами.

Ключевые слова: Массоперенос, диффузия, дисперсия, радиоактивный распад.

1. Перенос примесей по воздуху

Распространение примесей в атмосфере происходит в результате турбулентной диффузии и ветрового переноса. Ветровой перенос приводит к тому, что при непрерывном истечении примеси в атмосферу образуется струя выброса. Диффузия примесей в воздухе возникает в результате воздействия вихрей на облако выброса. Диффузионно-транспортная модель распространения загрязнений без учета физико-химических трансформаций будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho C_k)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho(u-w)C_k) + \operatorname{div}(\rho K \operatorname{grad} C_k) + \rho Q_k^* + \rho q_k, \quad (1.1)$$

где ρ – плотность; C_k – концентрация k -го компонента смеси ($k=1,2,3,\dots,N$); v – скорость ветра; w – скорость осаждения частиц примеси; K – коэффициент турбулентной диффузии; q_k – функция источника примесей; Q_k^* – источник (сток) k -го компонента раствора за счет ядерных реакций.

В данной постановке поле скоростей будем считать известным. Радиоактивный распад описывается следующим соотношением:

$$Q_k^* = \frac{dC_k}{dt} = -\lambda C_k, \quad (1.2)$$

где λ – постоянная радиоактивного распада данного нуклида.

2. Перенос примесей подземными водами

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, г. Саранск; naumkinaen@yandex.ru.

Предполагая, что процесс изотермический, жидкость сжимаема, фильтрация подчиняется закону Дарси, приходим к общепринятой конвективно-диффузионной модели подземного массопереноса без учета физико-химических превращений внутри жидкости:

$$\frac{\partial(\varphi\rho C_k)}{\partial t} = -div(\rho V C_k) + div(\eta\rho grad C_k) + div(D\rho grad C_k) - \rho \frac{\partial(\alpha_k)}{\partial t} + \rho Q_k^* + \rho q_k, \quad (2.1)$$

где φ – пористость; ρ – плотность; C_k – концентрация k -го компонента смеси ($k=1,2,3,\dots,N$); V – скорость фильтрации; η – эффективный коэффициент молекулярной диффузии; D – тензор гидродинамической дисперсии; α_k – концентрация k -го компонента в реакции, протекающей между раствором и породой; q_k – функция источника примесей; Q_k^* – источник (сток) k -го компонента раствора за счет ядерных реакций. Гидродинамический тензор рассеяния, для изотропной пористой среды, определен следующими формулами:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \alpha_L \frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_y^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_z^2}{|v|}, \\ D_{yy} &= \alpha_L \frac{v_y^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_z^2}{|v|}, \\ D_{zz} &= \alpha_L \frac{v_z^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T \frac{v_y^2}{|v|}, \\ D_{xy} &= D_{yx} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{v_x v_y}{|v|}, \\ D_{xz} &= D_{zx} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{v_x v_z}{|v|}, \\ D_{yz} &= D_{zy} = (\alpha_L - \alpha_T) \frac{v_y v_z}{|v|}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где α_L – коэффициент продольной дисперсии; α_T – коэффициент поперечной дисперсии; v_x, v_y, v_z – компоненты вектора скорости фильтрации; $|v|$ – модуль вектора скорости.

Значение коэффициента молекулярной диффузии для изотермического процесса полагается постоянным в диапазоне ($10_{-10} \div 10_{-4}$ м²/сут). Зависимость количества адсорбированного вещества при постоянной температуре от концентрации адсорбента при адсорбции радионуклидов описывается изотермой Фрейндлиха:

$$\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial t} = K_f C_k^\alpha, \quad (2.3)$$

где K_f и α – постоянные величины, определяемые из опыта. Радиоактивный распад описывается выражением (1.2).

3. Начальные и граничные условия

Расчет процесса миграции примесей осуществляется в течение интервала времени $0 \leq t \leq t_{end}$ в некоторой области Ω , ограниченной поверхностью $\partial\Omega$. Поэтому решение уравнения массопереноса примеси ищется в цилиндре:

$$P = \{(x, y, z, t) : (x, y, z) \in \Omega, 0 < t < t_{end}\} \quad (3.1)$$

Начальным условием для уравнения массопереноса примесей является распределение концентраций:

$$C_k(x, y, z, 0) = C_k^0(x, y, z), \quad (3.2)$$

$k=1,2,3,\dots,N$. На внешних границах $\Sigma = \{(x, y, z, t) : (x, y, z) \in \partial\Omega, 0 < t < t_{end}\}$ могут быть поставлены условия вида:

$$\alpha_{\partial\Omega} C_k + \beta_{\partial\Omega} \frac{\partial C_k}{\partial n} = \gamma_{\partial\Omega} \quad (3.3)$$

Численное решение поставленной задачи основано на расщеплении ее по физическим процессам. В данный момент ведется разработка алгоритма высокого порядка точности для конвективного переноса на основе разрывного метода Галёркина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алоян А. М., *Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере*, Наука, М., 2008, 415 с.
2. Гусев Н. Г., Беляев В. А., *Радиоактивные выбросы в биосфере: Справочник*, 2-е изд., перераб. и доп., Энергоатомиздат, М., 1991, 256 с.
3. Грей С., Синг К., *Адсорбция, удельная поверхность, пористость*, Мир, М., 1984, 306 с.
4. Коллинз Р., *Течение жидкостей через пористые материалы*, Мир, М., 1964, 350 с.
5. Румынин В. Г., *Геомиграционные модели в геоэкологии*, Наука, СПб., 2011, 1158 с.

Description of the mathematical model of the transport of radioactive contaminants in the air and groundwater

© E. N. Panyushkina²

Abstract. Modeling the dynamics of the distribution of concentration of harmful substances is of great importance in the elimination of consequences of emergency situations as well as in determining the hazardous areas of infection. The article describes a mathematical model of the transport of radioactive contaminants in the atmosphere and by underground waters.

Key Words: Mass transfer, diffusion, dispersion, radioactive decay.

² Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; naumkinaen@yandex.ru.