УДК 517.92

Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных

© В. И. Никонов[1]

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных, выраженные через матричные многочлены.
Ключевые слова: частичная устойчивость, минимальный многочлен, матричный многочлен.

Данная работа является обобщением исследований по частичной устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений, рассмотренных в [3].

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Исследуется устойчивость относительно заданной части компонент фазового вектора системы
$$\frac{dx}{dt} = A_*x(t), \tag{1.1}$$
где $x \in \mathbb{R}^n, A_*$ – матрица, соответствующих размеров.

Предположим, что исследуется устойчивость по первым m компонентам фазового вектора x системы (1.1). Обозначим первую группу координат фазового вектора через y, а остальные компоненты составят вектор z. В связи с этим, систему (1.1) представим в виде
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ay(t) + Bz(t), \\ \frac{dz}{dt} &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$
где $y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times m}, D \in \mathbb{R}^{p\times p}, n = m + p, p \geq 0$.

Предположим, что многочлены
$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + \gamma_{i1}\lambda^{s_i-1} + \cdots + \gamma_{i,s_{i-1}}\lambda + \gamma_{i,s_i}, i = 1, \ldots, m,$$
являются правыми минимальными аннулирующими многочленами вектор-строк матрицы B относительно линейного оператора, заданного матрицей D. Тогда справедливо соотношение
$$b_iD^{s_i} + \gamma_{i1}b_iD^{s_i-1} + \cdots + \gamma_{i,s_i-1}b_iD + \gamma_{i,s_i}b_i = 0, i = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$
которое может представлено в виде
$$b_i\varphi_i(D) = 0, i = 1, \ldots, m.$$

Пусть
$$s = \max_{1\leq i\leq m} s_i.$$

[1] Заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikonovvi@math.mrsu.ru.

Введем в рассмотрение диагональные матрицы

$$\Gamma_j = diag(\gamma_{1s_1-j}, \gamma_{2s_2-j}, \ldots, \gamma_{m,s_m-j}), j = \overline{0, s}.$$

Кроме этого, положим,

$$\gamma_{i,s_i-j} = 1, \text{при } s_i = j, \text{и } \gamma_{i,s_i-j} = 0, \text{при } s_i < j.$$

Следует отметить, что элементы данных матриц состоят из коэффициентов минимальных аннулирующих многочленов (1.3).

Таким образом, имеет место матричное равенство

$$\Gamma_s BD^s + \Gamma_{s-1} BD^{s-1} + \cdots + \Gamma_0 B = 0. \tag{1.4}$$

Дифференцируя s раз первую подсистему системы (1.2), в силу второй ее подсистемы и, используя условие (1.4) приходим к матричному дифференциальному уравнению, относительно исследуемых компонент фазового вектора

$$\begin{aligned}
&\Gamma_s \frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\frac{d^s y}{dt^s} + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \cdots \\
&+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\frac{dy}{dt} - \\
&-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1} BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y = 0.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Например, если $s = 2$, то получаем матричное дифференциальное уравнение

$$\Gamma_2 \frac{d^3 y}{dt^3} + (\Gamma_1 - \Gamma_2 A)\frac{d^2 y}{dt^2} + (\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC)\frac{dy}{dt} - (\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC)y = 0.$$

Таким образом, исследование y-устойчивости исходной системы можно свести к исследованию устойчивости матричного уравнения (1.5)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы система* (1.2) *была y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (1.5) *было устойчивым.*

Теорема 1.2. *Для того, чтобы система* (1.2) *была асимптотически y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы многочлен*

$$\begin{aligned}
&P(\lambda) = \det(\Gamma_s \lambda^{s+1} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\lambda^s + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\lambda^{s-1} + \cdots \\
&+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\lambda - \\
&-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1} BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C))
\end{aligned} \tag{1.6}$$

был устойчивым.

Следствие 1.1. *Если степень многочлена* (1.6) *равна n, то система* (1.2) *приводима к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y. В этом случае характеристическое уравнение системы* (1.2) *совпадает с характеристическим уравнением дифференциального уравнения* (1.5), *а, следовательно, y-устойчивость системы* (1.2) *возможна лишь в случае устойчивости системы по всем координатам фазового вектора x.*

Итак, полученные условия устойчивости, позволяют сделать вывод об устойчивости заданной части переменных фазового вектора исследуемой линейной стационарной системы.

2. Системы линейных разностных уравнений

Аналогичные результаты имеют место и для линейную разностных систем вида

$$x(t+1) = A_* x(t), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, A_*$ – постоянная матрица соответствующих размеров. Представим систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Ay(t) + Bz(t), \\ z(t+1) &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

и, проведя аналогичные преобразования, приходим к матричному дискретному уравнению

$$\begin{aligned} &\Gamma_s y(t+s+1) + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)y(t+s) + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)y(t+s-1) + \cdots \\ &+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)y(t+1) - \\ &-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y(t) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подобный результат имеет место и для данных систем .

Т е о р е м а 2.1. *Для того, чтобы система* (2.2) *была* y *-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (2.3) *было устойчивым.*

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Данный подход применим и к исследованию y-устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y-устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_* x(t-\tau), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n, \tau = const, A_*$ -постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (3.1)) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t-\tau) + Bz(t-\tau), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= Cy(t-\tau) + Dz(t-\tau). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Проводя такие же преобразования как в [3], приходим к матричному линейному уравнению

$$\begin{aligned} &\Gamma_s \frac{d^{s+1}y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \\ &+(\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \cdots + \\ &+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\frac{dy(t)}{dt} - \\ &-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y(t-\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Следовательно, вопрос y-устойчивости системы (3.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3.3). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. *Для того, чтобы система* (3.1) *была* y*-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (3.3) *было устойчивым.*

Список литературы

1. Воротников В.И., *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 284 с.

2. Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1967, 576 с.

3. Никонов В.И., "Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных", *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 95–99.

A necessary and sufficient conditions for a partial stability of linear systems

© **V. I. Nikonov**[2]

Abstract. In the paper necessary and sufficient conditions are obtained for a partial stability of linear systems. It is expressed in term of matrix polynomial.

Key Words: Partial stability, minimal polynomial, matrix polynomial.

[2] Head of Algebra and Geometry Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikonovvi@math.mrsu.ru.