УДК 517.9

Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем

© Т. Ф. Мамедова [1], Д. К. Егорова [2]

Аннотация. В работе с помощью математического аппарата Е. В. Воскресенского исследуется вопрос существования асимптотического равновесия некоторых экономических систем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, асимптотическое равновесие, вектор-функции Ляпунова, абсолютно равномерно ограниченные решения.

1. Введение

При изучении динамических математических моделей сложных экономических систем особый интерес представляет поведение взаимосвязных подсистем исходной системы, так как на основе совокупности свойств и природы их взаимодействий можно определить устойчивость экономической системы в целом, а так же прогнозировать динамику ее развития. В работе [1] для анализа подобных экономических систем используется математический метод сравнения и вектор-функции Ляпунова. В данной работе эта же задача решается с помощью математического аппарата, разработанного Е. В. Воскресенским [2], причем предполагается использование лишь вектор-функций Ляпунова, что обеспечивает снятие части ограничений, по сравнению с предыдущим подходом к этому вопросу.

2. Постановка задачи

Рассмотрим экономическую систему S, которая состоит из взаимосвязных и взаимозависимых между собой подсистем $s_i, i=\overline{1,n}$. Устойчивость всей экономической системы определяется на основе устойчивости ее подсистем. Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2.1}$$

описывает экономическую систему S, где $x \in \mathbb{R}^n$ – есть состояние экономики, $f(t,x)$ – функция спроса и $f(t,x) \in \mathbb{C}^{(0,1)}(T\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Будем полагать, что решение $x(t:t_0,x_0)$ уравнения (2.1) существует для всех начальных условий $(t_0,x_0)\in T\times\mathbb{R}^n$ и $t\in T_0$. Здесь T – временной интервал и $T_0=[t_0,+\infty)$. Кроме этого компоненты вектора x системы S неотрицательны, т.е. $x\in\mathbb{R}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, i=\overline{1,n}\}$. Предположим так же, что

$$f(t,0)=0, \forall t\in T \tag{2.2}$$

и $x=0$ – единственное состояние равновесия экономической системы S, описываемой дифференциальным уравнением(2.1).

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; mamedovatf@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; egorovadk@mail.ru

Пусть вектор-функция спроса $f(t,x)$ имеет компоненты $f_i(t,x) \equiv f_i\left(t, d_{i1}x_1, d_{i2}x_2, ..., d_{in}x_n\right), i = \overline{1,n}$, где элементы $d_{ij} : T \to [0,1], d_{ij}(t) \in \mathbb{C}(T)$ отражают силу взаимозависимости подсистем s_i в системе S. Тогда обозначим через $D = (d_{ij})$ – матрицу взаимодействия размерности $(n \times n)$. Фундаментальную матрицу взаимодействия D_f – определим следующим образом. Все элементы d_{ij} принимают двоичные значения: 1 – если j-ая подсистема влияет на i-ую, 0 – если j-ая подсистема не влияет на i-ю. Будем предполагать, что структура многочисленных экономических систем такова, что элементы d_{ij}, отражающие взаимодействие i-ой и j-ой подсистем, могут быть произвольными функциями времени $d_{ij}(t), t \in T_0$. Очевидно, что под действием структурных возмущений группы систем либо перестают взаимодействовать, либо взаимодействуют в течение определенного экономического процесса.

Найдем условия асимптотического равновесия экономической системы S, описываемой дифференциальным уравнением (2.1).

3. Об асимптотическом равновесиии

Адаптируем определение асимптотического равновесия Чезари [3] к нашей задаче.

Определение 3.1. *Будем говорить, что дифференциальное уравнение* (2.1) *имеет асимптотическое равновесие в структуре S, если каждое его решение $x(t)$ имеет предел $x(t) \to c, c \in \mathbb{R}^n$, при $t \to +\infty$ и для любого заданного $c \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(t)$, которое при $t \to +\infty$ имеет своим пределом этот вектор для любой матрицы взаимодействия D.*

Определение 3.2. *Будем говорить, что состояние равновесия $x = 0$ системы* (2.1) *называется устойчивым в структуре S, если оно устойчиво по Ляпунову для любой матрицы взаимодействия D.*

Определение 3.3. [5] *Решения $x(t; t_0, x_0)$ дифференциального уравнения* (2.1) *называются абсолютно равномерно ограниченными для $\| x_0 \| \leq r, t \geq T$, если $\| x(t; t_0, x_0) \| \leq c_0(r)$ для всех $T \leq t, t_0 < +\infty$.*

Теорема 3.1. [5] *Для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения* (2.1) *при $\| x_0 \| \leq r, t \geq T$, необходимо и достаточно существование функций $V, W : [T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ таких, что:*

a) $V(t,x), W(t,x) \to +\infty$ при $\| x \| \to +\infty$ равномерно по t;

b) $V(t,x) \leq \rho_1(r), W(t,x) \leq \rho_2(r)$ для $\| x \| \leq r$;

c) $V(t,x(t)), W(t,x(t))$ — соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где $x(t)$ — решение уравнения (2.1).

Доказательство.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Необходимость и достаточность существования функции V при $t \geq T$ для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (2.1) проведено Иошизавой [4]. Докажем существование функции W.

Достаточность.

Пусть $T \leq t \leq t_0$. Согласно условию $b)$ $W(t,x) \leq \rho_2(r)$ при $\| x \| \leq r$. Исходя из условия $a)$ можно подобрать неотрицательную непрерывную функцию $\beta_2(r)$ такую, что $\beta_2(r) \leq W(t,x)$ при $\| x \| \leq r$, причем $\beta_2(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Поэтому можно выбрать такое $k_2(k_2 > p_2)$, что $\beta_2(k_2) > \rho_2(p_2)$.

Предположим, что для некоторого решения $x = x(t : t_0, x_0)$, исходящего из точки (x_0, t_0), мы имеем

$$\| x(t_1 : t_0, x_0) \| = k_2, \| x(t_2 : t_0, x_0) \| = p_2$$

и $p_2 < \| x(t : t_0, x_0) \| < k_2$ для $t_1 < t < t_2$. Рассматривая функцию $W(t, x(t : t_0, x_0))$ имеем, $W(t_1, x(t_1 : t_0, x_0)) \geq \beta_2(k_2)$ и $W(t_2, x(t_2 : t_0, x_0)) \leq \rho_2(p_2)$.

С другой стороны в силу условия $c)$ находим

$$W(t_1, x(t_1 : t_0, x_0)) \leq W(t_2, x(t_2 : t_0, x_0)).$$

Отсюда получим $\beta_2(k_2) < \rho_2(p_2)$. Мы пришли к противоречию.

Таким образом $\| x(t : x_0, t_0) \| \leqslant \rho_2(p_2)$, то есть решение равномерно ограничено при $T \leq t \leq t_0$.

Необходимость.

Пусть $T \leq t \leq t_0$. Рассмотрим абсолютно равномерно ограниченное решение уравнения (2.1) $x = x(t : t_0, x_0)$ при $T \leq t \leq t_0$. Положим $W(t, x) = \min\{\| x(\bar{t} : t, x) \| : T \leq \bar{t} \leq t_0\}$. Такую функцию можно определить для каждой точки (t, x) взятой из $[T, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Из определения функции W видно, что $W(t, x) \leq \| x \|$ при $r = \| x \|$, то есть имеет место условие $b)$.

В силу абсолютно равномерной ограниченности решений имеем

$$\| x(t : t_0, x_0) \| \leq A(R),$$

и можно предположить, что $A(R)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция от R. Тогда существует функция $R(\|x\|)$ такая, что $0 < R(\|x\|) \leq V(t, x)$, где $R(A)$ – обратная функция от $A(R)$, причем $R(A)$ строго монотонно возрастающая функция от A и $R(A) \to +\infty$ при $A \to +\infty$ отсюда следует, что $W(t, x) \to +\infty$ при $\| x \| \to +\infty$. Таким образом доказали существование функции $W(t, x)$.

Доказательство закончено.

Итак, для абсолютно равномерно ограниченного решения уравнения (2.1) существуют функции Ляпунова $V(t, x), W(t, x)$ удовлетворяющие условиям теоремы 3.1. В работе [2] приведены теоремы об абсолютной равномерной ограниченности решений, когда непосредственно по функции f строятся функции Ляпунова V и W.

В работе [5] рассматривается граничная задача с начальными данными $(+\infty, x_0)$ и приведены условия существования и единственности решения вида $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$. Сформулируем теорему, условия которой гарантируют асимптотическое равновесие уравнения (2.1).

Теорема 3.2. *Рассмотрим равномерно ограниченное по t и t_0 множество $E = \{x(t; t_0, x_0) : T \leq t, t_0 < +\infty, x_0 \in \mathbb{R}^n\}$ и абсолютно равномерно ограниченные решения $x(t; t_0, x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. Если пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ существуют и конечны $\forall t_0 \geq T$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то уравнение (2.1) имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство теоремы 3.2. следует из существования решения $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$, $\forall x_0$, так как в этом случае предел $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ существует и конечен.

Таким образом, если для решений дифференциального уравнения (2.1) выполняются условия теоремы 3.1., то по теореме 3.2. экономическая система S, описываемая дифференциальным уравнением (2.1) с матрицей взаимодействия подсистем D, будет иметь асимптотическое равновесие.

Список литературы

1. Siljak D. D., “Competitive economic systems: stability, decomposition, and aggregation”, *IEEE Conference on Decision and Control*, 1973, 265–275.

2. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат.ун-та, Саран.фил., Саранск, 1990, 224 с.

3. Чезари Л., *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1964, 447 с.

4. Yoshizava T., “Liapunov’s function and boudedness of solutions”, *Funktiul*, 1956, 71–103.

5. Воскресенский Е. В., “Об аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика*, **4** (2003), 17–26.

About asymptotic equilibrium of some economic sistem

© T. F. Mamedova [3], D. K. Egorova [4]

Abstract. In this article the existence of asymptotic equilibrium of some economic systemsis investigated. This problem is solving with the usage E.V. Voskresensky’s results.

Key Words: differential equations, asymptotic equilibrium, the vector Lyapunov function, absolutely in regular intervals limited solutions.

[3] Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru

[4] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru