УДК 519.213

О некоторых классах копул

© **Е. М. Бронштейн**[1], **Е. И. Прокудина**[2]

Аннотация. В работе рассматриваются копулы n переменных такие, что всякое семейство из $n-1$ маргинальных случайных величин является независимым в совокупности. Описано два подхода к построению подобных копул. Детально рассмотрен случай $n = 2$.

Ключевые слова: копулы, независимость случайных величин, комонотонность, контрмонотонность.

1. Введение

Копулы (копула функции), активно исследуемые и применяемые в различных областях знания, начиная с работы Скляра [1], характеризуют в безразмерной форме степень зависимости случайных величин. Обзор теории копул см. [2].

Копулой называется функция распределения многомерной случайной величины (СВ), маргинальные распределения которой равномерно распределены на отрезке $[0,1]$. Аналитически копула – это неотрицательная функция $C(x_1,\ldots,x_n)$, определенная на кубе $[0,1]^n$, со следующими свойствами:

- $C(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n) = 0$ при любых $i, x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$;
- $C(1,\ldots,1,x_i,1,\ldots,1) = x_i$ при любых i, x_i;
- обобщенная монотонность: если $x_1 \le y_1,\ldots,x_n \le y_n$, то
$$\sum_{t_1,\ldots,t_n} \pm C(t_1,\ldots,t_n) \ge 0,$$
где суммируются все значения копулы при t_i, равных либо x_i, либо y_i, причем знак равен $(-1)^k$ (k равно числу значений x_i в последовательности аргументов).

Обобщенная монотонность копулы двух переменных имеет вид
$$C(y_1,y_2) + C(x_1,x_2) - C(y_1,x_2) - C(x_1,y_2) \ge 0.$$

Если $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$ – функция распределения случайного вектора $(X_1,\ldots,X_n)$ с функциями маргинальных распределений $F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)$, то существует копула C, для которой
$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = C\left(F_{X_1}(x_1),\ldots,F_{X_n}(x_n)\right),$$
причем единственная, если функции маргинальных распределений непрерывны (теорема Скляра).

Выделение копулы из общей функции распределения позволяет выявить только свойства, существенные для характеризации зависимости случайных величин. В частности,

[1] Профессор кафедры вычислительной математики и кибернетики, Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа; bro-efim@yandex.ru.

[2] Доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики, Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа; preliv@mail.ru.

при произвольном (в том числе, нелинейном) изменении масштабов маргинальных СВ копула не изменяется.

СВ независимы в совокупности, если их копула равна $C^{\perp}(x_1,\ldots,x_n) = x_1\cdot\ldots\cdot x_n$.

Множество копул является выпуклым, но не является решеткой: максимум и минимум копул могут таковыми не являться. Тем не менее, существует максимальная копула $C^{+}(x_1,\ldots,x_n) = min\{x_1,\ldots,x_n\}$, которая равна поточечному супремуму всех копул. C^{+} является копулой комонотонной многомерной СВ, т.е такой, что с ростом любой из маргинальных СВ не уменьшаются и все остальные.

Инфимумом всех копул является функция

$$C^{-}(x_1,\ldots,x_n) = max\{0, x_1+\ldots+x_n-n+1\},$$

которая является копулой только при $n=2$. Копула двумерной СВ равна C^{-}, если ее маргинальные СВ контрмонотонны, т.е. с ростом одной вторая не возрастает.

Начиная с работы П.Эмбрехтса и др. [3] копулы (чаще всего двух переменных) применяются в финансовом анализе. Обзор см. [4]. В частности в [5] к анализу состояния финансового рынка применены экстремальные копулы C^{+}, C^{-} и независимая копула $C^{\perp}$. Построены широкие классы копул (обзоры см. [6], [7]). Исследователи постоянно работают над построением новых копул с теми или иными свойствами (пример - недавняя работа [8]).

В настоящей работе вводятся копулы, описывающие в некотором смысле ослабленную независимость СВ, даются способы их построения. Более подробно рассмотрены копулы двух переменных.

2. $(n-1)$-независимые копулы

Определение 2.1. *Копулу n переменных при $n>2$ назовем $(n-1)$-независимой, если все подмножества из $n-1$ маргинальных распределений копулы независимые.*

Очевидно, что в это семейство входит и независимая копула $C^{\perp}$.

Для копул, имеющих плотность распределения $g(x_1,\ldots,x_n)$ (далее в основном будут рассматриваться именно такие копулы), критерий $(n-1)$-независимости очень прост.

Предложение 2.1. *Для того, чтобы функция $g(x_1,\ldots,x_n)$ являлась плотностью $(n-1)$-независимой копулы, необходимо и достаточно выполнение равенств*

$$\int_0^1 g(x_1,\ldots,x_n)dx_i = 1$$

для любых $i, x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$.

Доказательство. Поскольку координаты равноправны, положим $i=n$. Обозначим $G(t_1,\ldots,t_{n-1}) = \int_0^1 g(t_1,\ldots,t_n)dt_n$.

Если $G(t_1,\ldots,t_{n-1}) \equiv 1$, то

$$\int_0^{x_1} dt_1 \ldots \int_0^{x_{n-1}} dt_{n-1} \int_0^1 g(t_1,\ldots,t_n)dt_n = x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1},$$

т.е. СВ $X_1,\ldots,X_{n-1}$ независимые.

Обратно, если выполняется тождество

$$\int_0^{x_1} dt_1 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dt_{n-2} \int_0^{x_{n-1}} G(t_1, \ldots, t_{n-1}) dt_{n-1} \equiv x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1},$$

то, продифференцировав это равенство последовательно по всем переменным, получим: $G(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 1$, что и требовалось.
Доказательство закончено.

Независимым в совокупности СВ соответствует функция $g(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$. В следующих параграфах описаны достаточно общие способы построения подобных функций $g(x_1, \ldots, x_n)$.

3. Использование функций одной переменной

Пусть неотрицательная непрерывная функция $g(t)$ обладает следующими свойствами.

- Является периодической с периодом 1.
- $\int_0^1 g(t)dt = 1$.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ произвольный n-мерный вектор с компонентами 1 и -1. Как легко проверить, функция $g((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}))(\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n))$ является плотностью распределения копулы, обладающей свойством из предложения 2.1. Независимости в совокупности соответствует функция $g \equiv 1$.

Вектора $\boldsymbol{\sigma}$ и $-\boldsymbol{\sigma}$ порождают один и тот же класс функций (достаточно функцию $g(t)$ заменить на $g(-t)$), в других случаях эти классы разные, как следует из следующего утверждения.

Предложение 3.1. *Если g_1 и g_2 – непрерывные функции с описанными свойствами, $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2}$ – два вектора с компонентами 1 и -1, $\boldsymbol{\sigma_1} \neq \pm\ \boldsymbol{\sigma_2}$ и копулы с плотностями $g_1((\boldsymbol{\sigma_1}, \mathbf{x})), g_2((\boldsymbol{\sigma_2}, \mathbf{x}))$ равны, то $g_1 = g_2 \equiv 1$.*

Доказательство. Поскольку $\boldsymbol{\sigma_1} \neq \pm\ \boldsymbol{\sigma_2}$, то у векторов $\boldsymbol{\sigma_1}$ и $\boldsymbol{\sigma_2}$ существуют совпадающие (пусть первые, равные 1) и противоположные (пусть вторые) компоненты. Поскольку совпадают копулы и плотности непрерывны, то плотности также совпадают. Тогда $g_1(x_1 + x_2 + A) = g_2(x_1 - x_2 + B)$, где в A и B входят все остальные переменные с соответствующими знаками. Положив $x_1 = x_2$, имеем $g_1(2x_1 + A) = g_2(B)$, т.е. g_1, а тогда и g_2, постоянные. Из свойств функций g, $g_1 \equiv g_2 \equiv 1$.
Доказательство закончено.

Таким образом, введенные классы копул имеют в пересечении только $C^{\perp}$.

4. Кусочно постоянные плотности

$(n-1)$-независимые копулы могут порождаться многими плотностями, постоянными на параллелепипедах разбиения куба $[0,1]^n$.

Опишем две такие общие конструкции.

1. Пусть α, β – неотрицательные числа с суммой 2. Разобьем куб $[0,1]^n$ при $k \geq 1$ на $(2k)^n$ кубиков гиперплоскостями $x_i = s/(2k)(i = 1, \ldots, n; s = 0, \ldots, 2k)$. Выберем

подмножество полученных кубиков такое, что каждая прямая, параллельная какому-нибудь ребру куба, пересекает k кубиков. Функция g, равная α на выбранных кубиках и β на всех остальных, очевидно, удовлетворяет условиям предложения 2.1 и тем самым является плотностью $(n-1)$-независимой копулы.

Эта конструкция позволяет подойти к построению подобных функций на комбинаторной основе.

Опишем одну из возможных конструкций, позволяющих выделить подобное семейство кубиков. Зададим положение кубика n-мерным вектором $(a_1, \ldots, a_n)$ с натуральными компонентами от 1 до $2k$. Пусть $\varphi_i : \{1, \ldots, k\} \to \{k+1, \ldots, 2k\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ – биекции. Выберем произвольное семейство кубиков в кубе $[0, 1/2]^n$. Пусть для множества индексов S компоненты вектора $(a_1, \ldots, a_n)$ больше k, для остальных выполняется противоположное неравенство. Рассмотрим кубик с координатами $\varphi_i^{-1}(a_i)$ при $i \in S$, a_i при $i \notin S$. Этот кубик расположен в кубе $[0, 1/2]^n$, т.е. является выбранным или нет. Если он выбранный, то кубик, положение которого задается вектором $(a_1, \ldots, a_n)$, попадет в выбранные тогда и только тогда, когда мощность $|S|$ является четной, если же нет, то кубик с координатами $(a_1, \ldots, a_n)$ попадет в выбранные в противоположной ситуации.

Если рассмотреть только 2^n кубиков с координатами $(y_1, \ldots, y_n)$, где каждая из координат равна a_i или $\varphi_i(a_i)$, то каждая прямая, параллельная ребру куба, либо не пересекает ни одного из этих кубиков, либо пересекает ровно два кубика, один из которых попал в выбранные. Отсюда следует, что построение приводит к плотности распределения с нужными свойствами.

Из приведенного построения видно, что множество таких функций весьма обширно: при заданных k, α, β их число равно $2^{k^n} \cdot (k!)^n$.

2. Пусть $k \geq 2$ и $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ – неотрицательные числа такие, что $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = k$. Разобьем, как и выше, куб $[0, 1]^n$ на кубики гиперплоскостями

$$x_i = s/k \quad (i = 1, \ldots, n; s = 0, \ldots, k).$$

   На каждом из кубиков разбиения положим плотность равной одному из значений $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ таким образом, чтобы в каждом ряду любого координатного направления встречалось каждое из этих значений (естественно по одному разу). Очевидно, что так определенная плотность удовлетворяет условию предложения 2.1. Обеспечить такое построение можно, в частности, расположив значения в многомерном „шахматном“ порядке: пусть, как и выше, кубик задается n-мерным вектором $(a_1, \ldots, a_n)$. Значение плотности в кубике примем равным α_i, если

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv i (mod \;\; k).$$

Разумеется, подобные функции можно построить и при разбиении куба на параллелепипеды. Некоторые примеры такого вида приведены в следующем пункте.

5. Случай $n = 2$

Разумеется, при $n = 2$ понятие $(n-1)$-независимости не имеет смысла. Тем не менее, приведем соответствующие построения.

При $n = 2$ построение из п. 3 приводит к двум классам копул:

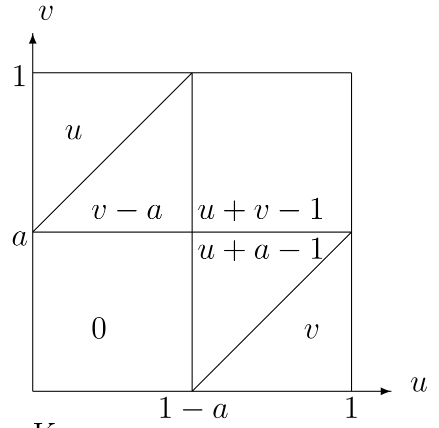
$$C_g^+(x,y) = \int_0^x du \int_0^y g(u-v)dv, \quad C_g^-(x,y) = \int_0^x du \int_0^y g(u+v)dv.$$

В качестве функции g можно использовать и обобщенную, в частности, периодически продолженную δ- функцию Хевисайда. В этом случае, как легко проверить, функции C_δ^+ и C_δ^- равны соответственно комонотонной и контрмонотонной копулам C^+ и C^-, отсюда и обозначения.

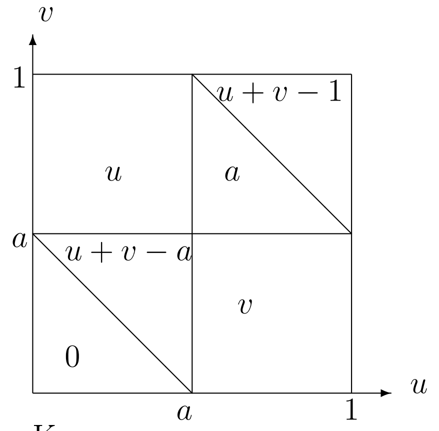
Введем более широкие классы копул, порожденные смещенными δ-функциями $\delta(a)(0 \le a \le 1)$, сосредоточенными в точках $a + k$, где k – целое число.

В [9] функции $C_{\delta(a)}^+, C_{\delta(a)}^-$ названы соответственно копулами ко- и контрмонотонного типа.

Эти копулы имеют следующий вид.



Копула комонотонного типа

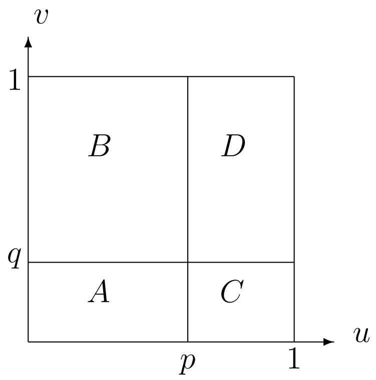


Копула контрмонотонного типа

В [9] так определенные копулы были использованы для оценки перспектив российского финансового рынка, полученные результаты согласуются с мнением экспертов.

Приведем также конструкцию копулы двух переменных с кусочно постоянной плотностью, частным случаем которой является копула, построенная в п. 4.

Пусть $p, q \in (0,1)$. Прямыми $u = p, v = q$ квадрат $[0,1]^2$ разбивается на четыре прямоугольника (см. рисунок).



Если плотность в области A равна a, то в областях B, C, D плотность равна

$$b = \frac{1-aq}{1-q}, c = \frac{1-ap}{1-p}, d = \frac{1-p-q+apq}{(1-p)(1-q)}.$$

Из неотрицательности плотности следует, что значение a должно удовлетворять следующим условиям:

$$a \leq \frac{1}{p}, a \leq \frac{1}{q}, a \geq 0, a \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{pq}.$$

Как легко проверить, множество допустимых значений a всегда непустое. В частности, оно содежит 1, это соответствует независимой копуле $C^{\perp}$.

Значения соответствующей копулы в областях A, B, C, D соответственно равны

$$auv; aqu + b(v-q)u; apv + c(u-p)v; apq + b(v-q)p + cq(u-p) + d(u-p)(v-q).$$

При $p = q = 0,5$ получаем конструкцию, описанную в п. 4. Допустимые значения a – отрезок $[0, 2]$.

В этом случае значения копулы в областях A, B, C, D соответственно равны

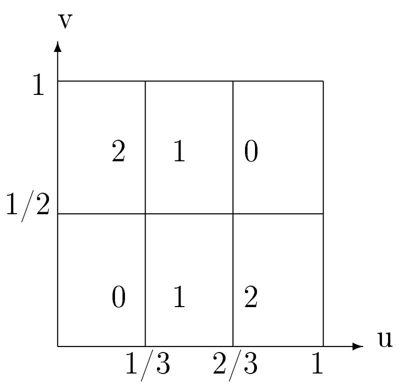
$$auv; 0,5au + bu(v-0,5); 0,5av + bv(u-0,5); 0,25a + 0,5b(u+v-1) + a(u-0,5)(v-0,5).$$

Здесь $b = 2 - a$.

Как и в общем случае, при $a = 1$ получаем независимую копулу. Естественно полагать, что при $a > 1$ копула имеет сдвиг к комонотонной, а при $a < 1$ – к контрмонотонной копулам.

Приведем также пример копулы рассматриваемого вида, кусочно постоянной на прямоугольниках.

Разобьем квадрат на шесть прямоугольников прямыми $u = 1/3, u = 2/3, v = 1/2$. Одна из плотностей копул с нужными свойствами приведена на рисунке.



6. Заключение

В статье рассмотрены копулы n переменных, у которых любые $n-1$ маргинальных СВ независимы, а все они таковыми, вообще говоря, не являются. Приведены способы построения таких копул и соответствующие примеры.

Было бы интересно построить копулы n переменных, у которых при заданном k любые k маргинальных СВ независимы в то время, как никакие $k+1$ таковыми не являются.

Список литературы

1. Sclar A., "Fonctions de répartition à n dimensions et leures marges.", *Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris*, 1959, № 8, 229 – 231.
2. Nelsen R. B., *An Introduction to Copulas*, Springer, 1999.
3. Embrechts P., Hoeing A., Juri A., *Using copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*, ETH preprint, 2001.
4. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula methods in finance*, John Wiley & Sons, 2004.
5. Бронштейн Е. М., Прокудина Е. И., Герасимова А. С., Дубинская К. Г., "Оценка взаимосвязей временных рядов курсов акций с помощью копула функций", *Прикладная эконометрика,*, 2011, № 2(22), 22–31.
6. Пеникас Г. И., "Модели "копула"в приложении к задачам финансов", *Журнал Новой Экономической Ассоциации*, 2010, № 7, 24-44.
7. Пеникас Г. И., *Копулы в управлении рисками банков. Практика применения моделей в России*, LAP Lambert Academic Publishing, Saarbruken, 2011.
8. Durante F., Rodriguez-Lallena J. A., Ubeda-Flores M. U., "New constructions of diagonal patchwork copulas", *Information Sciences*, 2009, № 179, 3383-3391.
9. Бронштейн Е. М., Зинурова А. Р., "Копулы специального вида и их применение к анализу состояния финансового рынка", *Прикладная эконометрика*, 2012, № 3(27), 109–114.

On some classes of copulas.

© **E. M. Bronshtein**[3], **E. I. Prokudina**[4]

Abstract. Copulas of n variables such that any family of $n-1$ marginal random values is independent are considered. Two approaches to the construction of such copulas are described. The case $n=2$ is considered in detail.
Key Words: copulas, independence of random values, comonotonicity, countermonotonicity.

[3] Professor, Numerical Mathematics and Cybernetics Chair, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, bro-efim@yandex.ru

[4] Associate Professor, Numerical Mathematics and Cybernetics Chair, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, preliv@mail.ru