В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.9

Нелокальная разрешимость задачи Коши для диссипативного уравнения плотности дислокаций с квадратичной нелинейностью

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2]

Аннотация. Рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, характеризующее изменение плотности дислокаций при наличии диффузионной ползучести. С применением метода дополнительного аргумента выведены глобальные оценки самого решения и его производных до третьего порядка по пространственным переменным; определены условия, при которых задача Коши имеет нелокальное решение.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, глобальные оценки, нелокальная разрешимость, метод дополнительного аргумента.

В работе [1] при изучении динамики дислокаций в температурно- зависимых явлениях, таких как диффузионная ползучесть, для определения плотности дислокаций было выведено уравнение:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \delta \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_2} \right)^2 \right] - A\nu + B\nu^2 = 0, \tag{1.1}$$

где δ, A, B - положительные константы, характеризующие параметры физического процесса, и, в частности, зависящие от температуры. При выводе уравнения (1.1) за основу была взята модель изменения скалярной плотности дислокаций в стержнях при кручении. Вместе с тем известно, что упругое кручение стержней из-за эффекта Пойнтинга вызывает продольные деформации как при малых, так и при больших деформациях [2]. Андроновым И.Н. и Лихачёвым В.А. [3] обнаружен эффект удлинения стержней при жёстком пластическом циклическом кручении с малой скоростью нагружения, зависящий от температуры, амплитуды и числа циклов закручивания, и вызванный дислокационной текстурой металлов, близкой к диффузионной ползучести. Таким образом, энергетический баланс для свободной энергии при кручении [4] является универсальным и приемлемым для растяжения стержней при диффузионной ползучести, сохраняющий вид дифференциального оператора в правой части уравнения (1.1).

Уравнение (1.1) описывает изменение плотности переползающих дислокаций с течением времени при заданном начальном условии

$$\nu(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2), \qquad x_1^2 + x_2^2 \le R^2. \tag{1.2}$$

Но так как для дифференциального уравнения первого порядка необходимы дополнительные исследования, чтобы определить условия, при которых решение задачи Коши (1.1)-(1.2) не выходит из круга $x_1^2 + x_2^2 \le R^2$, то в [1] было сделано упрощающее предположение,

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

что $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Так что начальное условие (1.2) приобрело вид

$$\nu(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

С помощью метода дополнительного аргумента [5] для задачи Коши(1.1),(1.3) в [1] было доказано наличие локального решения на некотором отрезке $[0, T_1]$, определяемом из условия сходимости последовательных приближений, и получены глобальные оценки для самой функции и её первых производных:

$$|\nu(t, x_1, x_2)| \leq C_1 = const, \quad \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_i}\right| \leq C_2 = const, \ i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Однако, оценок (1.4) недостаточно для доказательства существования нелокального решения на заранее заданном отрезке $[0, T]$. Для этого нужны (как вариант) глобальные оценки для вторых и третьих производных, выводу которых и посвящена данная статья.

Так же как в [1], применим для исследования задачи (1.1),(1.3) метод дополнительного аргумента. В соответствии с изложенной в [1] схемой вначале преобразуем задачу (1.1),(1.3) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.1) по x_1 и x_2 и введя новые неизвестные функции $p_1(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1}\nu(t, x_1, x_2), p_2(t, x_1, x_2) = \partial_{x_2}\nu(t, x_1, x_2)$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\right) = F_i(t, \nu, p_1, p_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.5}$$

где $F_i(t, \nu, p_1, p_2) = -(2B\nu - A)p_i$.

Из (1.1) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial \nu}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\right) = F_0(t, \nu, p_1, p_2), \tag{1.6}$$

где $F_0(t, \nu, p_1, p_2) = -B\nu^2 + A\nu + \delta(p_1^2 + p_2^2)$. Продифференцировав (1.3), получим начальные условия для p_1 и p_2:

$$p_i(0, x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2) = \partial_{x_i}\varphi_0(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.7}$$

Далее, продифференцировав (1.5), (1.7) по x_1 и x_2 и введя обозначения

$$q_0 = \frac{\partial p_1}{\partial x_2} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad q_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \quad q_2 = \frac{\partial p_2}{\partial x_2},$$

придём ещё к трём уравнениям:

$$\frac{\partial q_0}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial q_0}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial q_0}{\partial x_2}\right) = -[2\delta(q_1 + q_2) + 2B\nu - A]q_0 - 2Bp_1p_2, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial q_j}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial q_j}{\partial x_2}\right) = -2\delta q_j^2 - (2B\nu - A)q_j - 2\delta q_0^2 - 2Bp_j, \quad (j = 1, 2), \tag{1.9}$$

с соответствующими начальными условиями

$$q_0(0, x_1, x_2) = \varphi_{12}(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 \varphi_0(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{1.10}$$

$$q_j(0, x_1, x_2) = \varphi_{jj}(x_1, x_2) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 \varphi_0(x_1, x_2)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (j = 1, 2). \tag{1.11}$$

Составим для задачи (1.3),(1.5) - (1.11) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\delta w_1(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_1(t,t,x_1,x_2) = x_1, \tag{1.12}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\delta w_2(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_2(t,t,x_1,x_2) = x_2, \tag{1.13}$$

$$\frac{dw_i(s,t,x_1,x_2)}{ds} = F_i(s,w_0,w_1,w_2), \quad (i=0,1,2), \tag{1.14}$$

$$w_i(0,t,x_1,x_2) = \varphi_i(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \quad (i=0,1,2), \tag{1.15}$$

$$\frac{d\omega_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -[2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A]\omega_0 - 2Bw_1w_2, \tag{1.16}$$

$$\omega_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_{12}(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \tag{1.17}$$

$$\frac{d\omega_j(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -2\delta\omega_j^2 - (2Bw_0-A)\omega_j - 2\delta\omega_0^2 - 2Bw_j^2, \quad (j=1,2), \tag{1.18}$$

$$\omega_j(0,t,x_1,x_2) = \varphi_{jj}(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)), \quad (j=1,2). \tag{1.19}$$

Для задачи (1.12)-(1.15) при выполнении условий

$$\varphi_0 \in \bar{}^{2}(\mathbb{R}^2), \quad \varphi_0(x_1,x_2) \geq \frac{A}{2B} \tag{1.20}$$

из результатов работы [1] следуют глобальные оценки

$$\frac{A}{2B} \leq w_0(s,t,x_1,x_2) \leq N_0, \tag{1.21}$$

$$|w_i(s,t,x_1,x_2)| \leq \Phi_1, \quad (i=1,2), \tag{1.22}$$

где

$$N_0 = max\left\{\frac{A+\sqrt{A^2+2B\delta\Psi_1^2}}{2B}, \sup_{\mathbb{R}^2}\varphi_0\right\}, \quad \Phi_1 = max\{\sup_{\mathbb{R}^2}|\varphi_1|, \sup_{\mathbb{R}^2}|\varphi_2|\}.$$

Выведем глобальные оценки для $\omega_0,\omega_1,\omega_2$.

Примем пока формально, а потом установим условия выполнимости этого предположения, что имеет место неравенство

$$P \stackrel{def}{=} 2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A \geq 0. \tag{1.23}$$

С этим предположением из (1.16)-(1.17) следует глобальная оценка:

$$|\omega_0| \leq N_{00} \stackrel{def}{=} \Phi_{12} + 2B\Phi_1^2. \tag{1.24}$$

Для разности $\omega_1-\omega_2$ из (1.18) вытекает уравнение

$$\frac{d(\omega_1-\omega_2)}{ds} = -[2\delta(w_1+w_2)+2Bw_0-A](\omega_1-\omega_2) - 2B(w_1^2+w_2^2).$$

С учётом (1.23) последнее уравнение приводит к глобальной оценке

$$|\omega_1 - \omega_2| \le N_{12} \overset{def}{=} \Phi_{11} + \Phi_{22} + 2BN_1^2, \tag{1.25}$$

где $\Phi_{jj} = \sup_{\mathbb{R}^2} |\varphi_{jj}|, \quad (j = 1, 2)$. Теперь сложим два уравнения из (1.18) и запишем уравнение для суммы $\omega_1 + \omega_2$:

$$\frac{d(\omega_1 + \omega_2)}{ds} = -\delta(\omega_1 + \omega_2)^2 - (2Bw_0 - A)(\omega_1 + \omega_2) - \delta(\omega_1 - \omega_2)^2 - 4\delta\omega_0^2 - 2B(w_1^2 + w_2^2). \tag{1.26}$$

С целью вывода глобальной оценки для $\omega_{12} \overset{def}{=} \omega_1 + \omega_2$ рассмотрим квадратное уравнение

$$\delta y^2 + (2Bw_0 - A)y + \delta(\omega_1 - \omega_2)^2 + 4\delta\omega_0^2 + 2B(w_1^2 + w_2^2) = 0. \tag{1.27}$$

Чтобы это уравнение имело действительные решения, необходимо чтобы дискриминант $d = (2Bw_0 - A)^2 - 4\delta^2(\omega_1 - \omega_2)^2 - 16\delta\omega_0^2 - 8\delta B(w_1^2 + w_2^2)$ был не меньше нуля:

$$d \ge 0. \tag{1.28}$$

С учётом уже имеющихся оценок (1.24), (1.25), (1.22) и возможностью выбрать $\min \varphi_0$ достаточно большим (что оправдано с физической точки зрения), можно конкретно определить условия, когда (1.28) имеет место.

При выполнении (1.28) уравнение (1.27) имеет два корня

$$y_1 = \frac{-(2Bw_0 - A) + \sqrt{d}}{2\delta}, \quad y_1 = \frac{-(2Bw_0 - A) - \sqrt{d}}{2\delta}.$$

Применив к уравнению (1.26) с начальным условием

$$\omega_1 + \omega_2|_{s=0} = \varphi_{11} + \varphi_{22}$$

метод оценок с использованием мажорантных и минорантных уравнений, развитый в [6], [7], получим, что при

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2} > y^* \overset{def}{=} \max_{s \in [0,T]} y_1 \tag{1.29}$$

будет справедлива оценка

$$y^* \le \omega_1 + \omega_2 \le \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_2^2}. \tag{1.30}$$

В силу оценки (1.30)

$$\omega_1 + \omega_2 \ge \frac{-(2Bw_0 - A) + \sqrt{d}}{2\delta} > -\frac{2Bw_0 - A}{2\delta}.$$

А значит $P = 2\delta(w_1 + w_2) + 2Bw_0 - A > -2\delta\frac{2Bw_0 - A}{2\delta} - (2Bw_0 - A) \ge 0$.

Таким образом, в рамках сделанных предположений условие (1.23) действительно имеет место, соответственно выполняются оценки (1.24), (1.25), (1.30).

Из (1.25), (1.30) следуют оценки

$$\frac{-\Phi_{11} - \Phi_{22} + y^*}{2} - BN_1^2 \le \omega_i \le \Phi_{11} + \Phi_{22} + BN_1^2, \quad i = 1, 2.$$

Обозначив $N_1 + \max\{\Phi_{11} + \Phi_{22} + BN_1^2, \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22} + N^*) + BN_1^2\}$, где $N^* = \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} y^*$, получим глобальную оценку

$$|\omega_i(s, t, x_1, x_2)| \le N_1, \quad (i = 1, 2). \tag{1.31}$$

Как установлено в [1] при $\varphi_0 \geq \frac{A}{2B}$ выполняется неравенство $w_0(s,t,x_1,x_2) \geq \varphi_0$ при всех x. Пусть $\Phi_0(\Phi_0 \geq \frac{A}{2B})$ то минимальное значение $\varphi_0(x_1,x_2)$, при котором имеет место условие (1.28). Из оценок (1.4), (1.22), (1.24), (1.31) при выполнении условий (1.28), (1.29), $\varphi_0 \geq \Phi_0$, вытекают оценки

$$\begin{gathered}\Phi_0 \leq \nu(s,t,x_1,x_2) \leq N_0,\\ \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_i}\right| \leq C_2, (i=1,2), \quad \left|\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_1 \partial x_2}\right| \leq N_{00}, \quad \left|\frac{\partial^2 \nu}{\partial x_j \partial x_j}\right| \leq N_1, (i=1,2).\end{gathered} \tag{1.32}$$

Основываясь на выведенных глобальных оценках и тождествах

$$w_0(s,t,x_1,x_2) = w_0(s,s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)) = \nu(s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)),$$

$$w_i(s,t,x_1,x_2) = w_i(s,s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)) = p_i(s,\eta_1(s,t,x_1,x_2),\eta_2(s,t,x_1,x_2)),$$
$$(i=1,2),$$

получим глобальные оценки

$$|\partial_{x_i} w_j| \leq M^1_{ij} = const, \qquad |\partial_{x_i} \eta_k| \leq C_\eta = const, \quad i=1,2; j=0,1,2; k=1,2.$$

Наконец, продифференцировав (1.18), (1.19) по x_1 и x_2, придем к двум линейным системам дифференциальных уравнений относительно $\partial_{x_1}\omega_j$ и $\partial_{x_2}\omega_j, (j=0,1,2)$. Для всех функций,входящих в эти системы (кроме $\partial_{x_1}\omega_j$ и $\partial_{x_2}\omega_j$) уже получены глобальные оценки. Основываясь на лемме 4.1 из главы IV книги [8] приходим к заключению, что существуют такие постоянные числа, не зависящие от локального интервала разрешимости, что

$$|\partial_{x_i}\omega_j| \leq M^2_{ij} = const, \quad i=1,2; j=0,1,2, \tag{1.33}$$

для всех s,t на любом промежутке разрешимости задачи (1.12) - (1.19). Соответственно, оценка (1.33) сохраняется при $s=t$, т.е. $|\partial_{x_i} q_j(t,x_1,x_2)| \leq M^2_{ij}$, что влечет в свою очередь оценки:

$$\left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1^3}\right| \leq M^2_{11}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_2^3}\right| \leq M^2_{22}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right| \leq M^2_{12}, \left|\frac{\partial^3 \nu}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right| \leq M^2_{21}. \tag{1.34}$$

Полученные глобальные оценки (1.32), (1.34) дают возможность продлить решение на любой заданный вначале промежуток $[0,T]$. Сформулируем общий итог исследования.

Теорема 1.2. *Пусть* δ, A, B *- положительные числа,* $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^3(\mathbb{R}^2)$, $\inf_{\mathbb{R}^2} \varphi_0 \geq A(2B)^{-1}$, *выполнены условия* (1.28),(1.29). *Тогда задача Коши* (1.1),(1.3) *имеет решение* $\nu(t,x_1,x_2) \in \overline{\mathbb{C}}^{1,3}([0,T] \times \mathbb{R}^2)$ *на любом заданном вначале конечном промежутке* $[0,T]$ *изменения переменной* t, *которое совпадает при* $s=t$ *с функцией* $w_0(s,t,x_1,x_2)$, *определяемой из задачи* (1.12)- (1.17).

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Алексеенко Н. С., “Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций с квадратичной нелинейностью”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:2 (2012), 15 – 21.

2. Зубов Л. М., “О прямом и обратном эффектах Пойнтинга в упругих цилиндрах.”, *Доклады РАН*, **380**:2 (2001), 194 – 196.

3. Андронов И. Н., Богданов Н. П., Власов В. П, Лихачёв В. А., “Закономерности осевого деформирования металлов при пластическом кручении”, *Проблемы прочности*, 1990, № 7, 86 – 90.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука, М., 1987.

5. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.

6. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.

7. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

8. Хартман Ф., *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, "Мир", М., 1970.

Nonlocal solvability od the Cauchy problem for the dissipative equation of the dislocation density with a quadratic non-linearity

© S. N. Alekseenko[3], S. N. Nagornykh[4]

Abstract. A non-linear first-order partial differential equation describing a dislocation density changing under a coercion of the diffusion creep is considered. The global estimates of the solution and its derivatives up to third order with respect to spatial variables are derived and the conditions of the non-local solvability of the Cauchy problem are determined with using the method of an additional argument.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, global estimates, nonlocal solvability, method of an additional argument.

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The senior lecture of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru