УДК 517.9

О структуре трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы с одномерными базисными множествами

© Ю. А. Левченко[1]

Аннотация. В работе уточняется структура трехмерного многообразия, допускающего диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла, неблуждающее множество которых содержит одномерное просторно расположенное базисное множество.

Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, аксиома A, аттрактор.

1. Введение и формулировка основного результата

Пусть f сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, заданный на замкнутом ориентируемом связном 3-многообразии M^3 и удовлетворяющие аксиоме A С.Смейла (то есть множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$). Согласно С. Смейлу [1] неблуждающее множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Любое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде конечного объединения $B_1 \cup \dots \cup B_k$ замкнутых подмножеств ($k \geq 1$), называемых периодическими компонентами множества $\mathcal{B}$, таких, что $f^k(B_i) = B_i, f(B_i) = B_{i+1}$ $(B_{k+1} = B_1)$. Число k называется периодом базисного множества $\mathcal{B}$.

Определение 1.1. *Базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j\geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется репеллером диффеоморфизма f. Аттрактор $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется растягивающимся, если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E^u_{\mathcal{B}})$ неустойчивого подрасслоения $E^u_{\mathcal{B}}$. Сжимающийся репеллер диффеоморфизма f определяется как растягивающийся аттрактор для f^{-1}. Базисное множество, не являющееся ни аттрактором, ни репеллером, будем называть седловым.*

В силу [2] нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется поверхностным, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой носителем множества $\mathcal{B}$.

Из работы [3] следует, что любой двумерный аттрактор (репеллер) диффеоморфизма f является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером).

В работе [4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов f в предположении, что их неблуждающее множество содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Там же доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество

[1] Младший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики., г. Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com

содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В [2] доказано, что если неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит двумерное поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$, принадлежащее поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$, то поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$ есть двумерный тор ручно вложенный[2] в M^3, а ограничение диффеоморфизма f на поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически сопряжено алгебраическому автоморфизму (Аносова), индуцированному ограничением исходного диффеоморфизма фундаментальной группе тора $M^2_{\mathcal{B}}$. В [5] доказано, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ состоит только из поверхностных двумерных базисных множеств, то многообразие M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем тор. В работах [6]-[8] выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов с поверхностными двумерными базисными множествами, для которого получена полная топологическая классификация.

Настоящая работа посвящена изучению диффеоморфизмов трехмерного многообразия, неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества. Отметим, что топологическая классификация одномерных базисных множеств на двумерных поверхностях получена в работах Плыкина Р.В., Гринеса В.З., Жирова А.Ю., Калая Х.Х., и кроме того, в работах Гринеса В.З., Бонатти Х., Ланжевена Р. найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях. Изучению диффеоморфизмов на три-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит одномерные растягивающиеся аттракторы (сжимающиеся репеллеры) посвящены работы Вильямса [9], Жужомы, Исаенковой [10], Боте [11], [12] и др. Заметим, что рассматриваемые в перечисленных работах базисные множества не являлись поверхностными. Кроме того, все известные примеры диффеоморфизмов трехмерного многообразия с одномерными растягивающимися аттракторами (сжимающимися репеллерами) не являются структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивого диффеоморфизма такого типа является открытым.

Однако, нетрудно построить пример структурно устойчивого диффеоморфизма, неблуждающее множество которого содержит нетривиальное одномерное поверхностное базисное множество. Рассмотрим DA-диффеоморфизм $f_0 : T^2 \to T^2$ на двумерном торе T^2. Напомним, что DA-диффеоморфизмом называется структурно устойчивый диффеоморфизм тора T^2, неблуждающее множество которого состоит из неподвижного источника и гиперболического одномерного аттрактора, полученного, так называемой, хирургической операцией Смейла [1] из диффеоморфизма Аносова 2-тора T^2. Представим трехмерный тор T^3 как прямое произведение $T^2 \times S^1$ тора T^2 на окружность S^1 и зададим на пространстве $T^3 = T^2 \times S^1$ отображение $F(x,t) = (f_0(x), \Phi(t))$ ($x \in T^2, t \in S^1$), где $\Phi(t) : S^1 \to S^1$ - диффеоморфизм окружности с двумя неподвижными точками: источником α_0 и стоком ω_0. В силу описанной конструкции полученный диффеоморфизм F удовлетворяет аксиоме A С. Смейла. Неблуждающее множество диффеоморфизма F состоит из двух нетривиальных одномерных просторно расположенных базисных множества, каждое из которых принадлежит поверхности гомеоморфной двумерному тору, а также одного неподвижного источника $\alpha \in T^2 \times \{\alpha_0\}$ и одного неподвижного седла $\sigma \in T^2 \times \{\omega_0\}$ (схема построения диффеоморфизма F показана на рисунке 1.1). Базисное множество принадлежащее поверхности $T^2 \times \{\omega_0\}$ является одномерным аттрактором, а базисное множество, лежащее на поверхности $T^2 \times \{\alpha_0\}$ является седловым. Кроме того,

[2] Пусть $D_0 : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ — стандартный диск и M^2 поверхность, топологически вложенная в 3-многобразие M^3. Поверхность M^2 называется локально плоской или ручной если для каждой точки $x \in M^2$ существует окрестность U_x точки x в M^3 и гомеоморфизм $h_x : \overline{U_x} \to \mathbb{R}^3$ такой, что $h(\overline{U_x} \cap M^2) = D_0$.

в построенном примере двумерные устойчивые (неустойчивые) многообразия точек базисных множеств пересекаются с поверхностями $T^2 \times \{\omega_0\}$, $T^2 \times \{\alpha_0\}$ по единственной кривой, при этом аттрактор, принадлежащий поверхности $T^2 \times \{\omega_0\}$ является объединением одномерных неустойчивых многообразий, а седловое базисное множество, принадлежащее поверхности $T^2 \times \{\alpha_0\}$, является пересечением двумерных неустойчивых многообразий с поверхностью $T^2 \times \{\alpha_0\}$. Из построения также следует, что устойчивые и неустойчивые многообразия точек неблуждающего множества пересекаются трансверсально и, следовательно, диффеоморфизм F является структурно устойчивым.

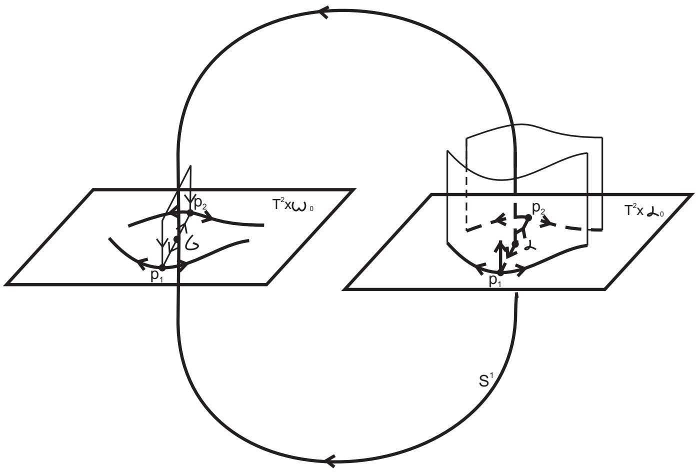

Рисунок **1.1**

Следуя [13], поверхностное базисное множество $\mathcal{B}$ назовем просторно расположенным, если не существует гомотопной нулю на $M^2_{\mathcal{B}}$ петли, образованной парой отрезков, являющихся пересечением устойчивого и неустойчивого многообразий какой-либо точки из $\mathcal{B}$ с $M^2_{\mathcal{B}}$.

Пусть $f : M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла. Предположим, что неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ содержит одномерное просторно расположенное базисное множество $\mathcal{B}$, периодическая компонента B которого имеет период k и принадлежит поверхности M^2_B.

Будем говорить, что для базисного множества $\mathcal{B}$ выполняется условие $(*)$, если двумерные устойчивые (неустойчивые) многообразия $W^s(x)(W^u(x))$ точек периодической компоненты B базисного множества $\mathcal{B}$ пересекаются с несущей поверхностью M^2_B по единственной кривой. Обозначим через $\hat{W}^s(x) = W^s(x) \cap M^2_B$ ($\hat{W}^u(x) = W^u(x) \cap M^2_B$) след устойчивого (неустойчивого) многообразия точки x.

Предположим теперь, что носитель периодической компоненты B является поверхностью гомеоморфеной тору T^2_B. Тогда справедливо следующее предложение, которое доказывается с использованием техники доказательства теоремы 2 из [2].

Предложение 1.1. *Ограничение диффеоморфизма $f^k|_{T^2_B}$ индуцирует гиперболический автоморфизм фундаментальной группы тора T^2_B (то есть матрица, индуцирующая этот автоморфизм, является гиперболической, то есть не имеет собственных значений, по модулю равных единице).*

Предположим теперь, что M^3 – замкнутое, неприводимое[3], ориентируемое многообразие и T^2 - двумерный тор вложенный в M^3. Согласно [14] будем называть T^2 аносовским

[3] Многообразие M называется неприводимым, если любая вложенная в M двумерная сфера ограничивает трехмерный шар.

тором, если существует диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ такой, что f индуцирует гиперболический автоморфизм фундоментальной группы тора.

Пусть M_A — мноогообразие, являющееся фактор-пространством, полученным из $T^2 \times [0,1]$ отождествлением точек $(z,1)$ и $(f_{A(z)},0)$, где f_A диффеоморфизм тора, индуцированный унимодулярной матрицей A, которая является либо гиперболической, либо тождественной, либо равной $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Замкнутое, неприводимое, ориентируемое многообразие M^3 допускает существование аносовского тора тогда и только тогда, когда многообразие M^3 гомеоморфно M_A.*

Следствием предложений 1.1., 1.2. является следующий результат, который является основным в настоящей работе.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A, заданный на замкнутом, неприводимом, ориентируемом трехмерном многообразии M^3, неблуждающее множество которого содержит одномерное просторно расположенное базисное множество $\mathcal{B}$, удовлетворяющее условию ($*$). Тогда если носитель периодической компоненты B базисного множества $\mathcal{B}$ гомеоморфен двумерному тору, то многообразие M^3 гомеоморфно многообразию M_A.*

2. Доказательство предложения 1.1.

Пусть B - периодическая компонента некоторого базисного множества $\mathcal{B}$ периода k диффеоморфизма f, принадлежащая поверхности T^2_B, гомеоморфной двумерному тору. Положим $g = f^k$.

Следуя [15] периодическую точку $p \in \mathcal{B}$ назовем граничной периодической точкой множества $\mathcal{B}$, если одна из компонент связности хотя бы одного из множеств $(W^u_p \cap M^2_{\mathcal{B}}) \setminus p$ или $(W^s_p \cap M^2_{\mathcal{B}}) \setminus p$ не пересекается с $\mathcal{B}$; периодические точки, не являющиеся граничными, назовем внутренними периодическими точками базисного множества $\mathcal{B}$. Аналогично [15] устанавливается, что граничные точки существуют и их конечное число.

Представим тор T^2_B как фактор-группу группы R^2 по целочисленной решетке $\Gamma = Z \oplus Z : T^2_B = R^2/\Gamma$. Обозначим через π естественную проекцию группы R^2 на фактор группу T^2_B, через $\bar{g} : R^2 \to R^2$ - диффеоморфизм, накрывающий $g|_{T^2_B}$ и через g_* - автоморфизм группы $\Gamma : g_*(\gamma) = \bar{g}(\gamma) - \bar{g}(0)$, где 0 - начало координат на R^2, $\gamma \in \Gamma$.

Предположим для определенности, что B содержит устойчивые многообразия своих точек.

Пусть $\pi^{-1}(B) = \bar{B}$ - полный прообраз базисного множества B на R^2 и $\bar{x}$ - точка из $\bar{B}$. Обозначим через $w^s_{\bar{x}}, w^u_{\bar{x}}$ прообразы устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s_x, \hat{W}^u_x$ точки $x = \pi(\bar{x})$, проходящие через точку $\bar{x}$. Введем на кривой $w^s_{\bar{x}}$ $(w^u_{\bar{x}})$ параметр $t \in R$ так, что $w^s_{\bar{x}}(0) = \bar{x}$ $(w^u_{\bar{x}}(0) = \bar{x})$. Обозначим через $w^{s+}_{\bar{x}}, w^{s-}_{\bar{x}}$ $(w^{u+}_{\bar{x}}, w^{u-}_{\bar{x}})$ компоненты связности множества $w^s_{\bar{x}} \setminus \bar{x}$ $(w^u_{\bar{x}} \setminus \bar{x})$, соответствующие значениям $t > 0$, $t < 0$ и через $x^s(t), y^s(t)$ $(x^u(t), {}^u(t))$ эвклидовы координаты на R^2 точки $w^s_{\bar{x}}(t)$ $(w^u_{\bar{x}}(t))$.

Тогда согласно [15] справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2.1. *Пусть существует последовательность $t_k \to +\infty$ $t_k > 0$ $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $w^{s+}_{\bar{x}}(t_k) \in \bar{B}$. Тогда луч $w^{s+}_{\bar{x}}$ уходит на R^2 в бесконечность и имеет иррациональное асимптотическое направление.*

Утверждение аналогичное утверждению леммы 2.1. имеет место и для прообразов неустойчивых многообразии точек из B.

Следствие 2.1. *Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ - любые точки из $\bar{B}$, которых кривые $w^s_{\bar{x}}, w^u_{\bar{y}}$ уходят на R^2 в бесконечность в обоих возможных на них направлениях. Тогда $w^s_{\bar{x}} \cap w^u_{\bar{y}} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Достаточно показать, что утверждение теоремы выполняется для некоторой степени диффеоморфизма g. Пусть p - внутренняя периодическая точка множества B и m - такое натуральное число, что $g^m(p) = p$. Не уменьшая общности, можно считать, что один из прообразов $\bar{p}$ точки p является началом координат на плоскости R^2. Пусть $\bar{g}_m$ - накрывающий g^m диффеоморфизм, для которого точка $\bar{p}$ является неподвижной и $\bar{p}_1$ - любая точка решетки Γ, отличная от $\bar{p}$. Так как $\bar{p}$ и $\bar{p}_1$ - прообразы внутренней периодической точки p, то в силу леммы 2.1. кривые $w^u_{\bar{p}}, w^s_{\bar{p}}, w^s_{\bar{p}_1}, w^u_{\bar{p}_1}$ уходят на R^2 в бесконечность в обоих возможных на них направлениях. Применяя следствие 2.1., получаем $w^s_{\bar{p}_1} \cap w^u_{\bar{p}} \neq \emptyset$, $w^u_{\bar{p}_1} \cap w^s_{\bar{p}} \neq \emptyset$. Отсюда, используя просторную расположенность базисного множества B, нетрудно получить, что орбита точки p_1, в силу действия диффеоморфизма $\bar{g}_m$ покидает любую компактную часть плоскости R^2. Предположим теперь, что матрица g^m_* не является гиперболической. Тогда существуют точки решетки Γ, отличные от начала координат, орбиты которых в силу действия g^m_* остаются в компактной части плоскости. Так как $g^m_*|_\Gamma = \bar{g}_m|_\Gamma$, то это невозможно.
Доказательство закончено.

Автор благодарит В.З. Гринеса за постановку задачи и полезные обсуждения, а также грант РФФИ 12-01-00672-а за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

2. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.

3. Brown A., “Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds”, *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.

4. Grines V., Zhuzhoma E., “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:5 (2005), 617–667.

5. Гринес В. З., Медведев В. С., Левченко Ю. А., “О структуре 3-многообразия, допускающего A-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством”, *Журнал СВМО*, **12**:2 (2010), 7–12.

6. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Журнал СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов”, *Журнал СВМО*, **14**:2 (2012), 48–57.

8. Гринес В. З., Левченко Ю. А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.
9. Williams R. F., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.
10. Жужома Е. В., Исаенкова Н. В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.
11. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods II”, *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.
12. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
13. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.
14. Hertz F., Herts M., Ures R., “Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds”, *Journal of modern dynamics*, **5**:1 (2011), 185–202.
15. Гринес В. З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.

On structure of the three-dimensional manifold admitting diffeomorphisms with one-dimensional basic sets

© **Y. A. Levchenko**[4]

Abstract. The paper clarifies the structure of three-dimensional manifold admitting A-diffeomorphisms whose non-wandering set contains of an one-dimensional surface basic set and supporting surface is homeomorphic to the 2-torus.

Key Words: diffeomorphism, basis set, the axiom A, the attractor

[4] Junior Researcher, Department of Differential Equations, Scientific-Research Institute of Applied Mathematics and Cybernetics. Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com