УДК 512.917+513.9

Применения метода многомерных возмущений одномерных хаотических отображений в клеточных сетях

© **М. И. Малкин**[1]

Аннотация. В данной работе показано наличие хаотического поведения в клеточных сетях, представляющих собой дискретные модели некоторых уравнений в частных производных диффузионного типа. Для этой цели применен метод, разработанный в [1], [2] и заключающийся в доказательстве существования и устойчивости топологических подков вблизи вырожденного хаотического отображения малой размерности.

Ключевые слова: разностные уравнения, хаотическое поведение траекторий, клеточные сети, дискретные модели уравнений диффузионного типа

1. Введение

В качественной теории динамических систем существует несколько подходов, имеющих целью установить наличие хаотического поведения траекторий. Наиболее типичной методикой здесь является исследование гомоклинических точек и как следствие, обнаружение (при проверке достаточных условий) структуры гиперболической или топологической подковы (см. работы [3], [8], [9]). Отметим, что установить хаотичность отображения или разностного уравнения малой размерности гораздо проще, чем в многомерном случае благодаря хорошо развитым аналитическим и вычислительным методам подсчета хаотических (в основном, энтропийных) характеристик для таких отображений. С помощью техники, развитой в работах [1], [2] удается доказать, что при выполнении естественных достаточных условий хаотичность поведения системы малой размерности продолжается и на многомерную окрестность в пространстве отображений. Как показывают результаты данной статьи, для некоторых классов клеточных сетей (решеток), являющихся различными дискретными моделями уравнений диффузионного типа, можно эффективно проверить достаточные условия хаотичности при сингулярных значениях малого параметра (коэффициента диффузии) и тем самым, указанная техника многомерных возмущений применима. Таким образом, доказано наличие хаоса в клеточных сетях, являющихся дискретными моделями конкретных систем диффузионного типа (уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова, уравнение Хаксли, модель Френкеля-Конторовой и др.).

Перейдем к формулировке основного результата работы [1], который мы будем использовать в следующей главе в применении к клеточным моделям. Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\Phi_\lambda(y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m}) = 0, \tag{1.1}$$

здесь параметр λ — элемент некоторого метрического пространства E, а функция Φ_λ определена на замкнутом параллелепипеде $Q^{m+1} \subset \mathbb{R}^{m+1}$, где $Q = [s_1, s_2] \backslash V$ для некоторых чисел $s_1 < s_2$ и открытого (возможно, пустого) множества $V \subset \mathbb{R}$. Мы предполагаем, что для любого $\lambda \in E$ функция $\Phi_\lambda : Q^{m+1} \to \mathbb{R}$ принадлежит классу C^1 и непрерывно зависит от λ на E. Кроме того, предполагается, что частные производные

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, malkin@mm.unn.ru

$\partial_i\Phi_\lambda(x_1,\dots,x_{m+1})$, $i=1,\dots,m+1$, $(x_1,\dots,x_{m+1})\in Q^{m+1}$ непрерывно зависят от λ на E, где $\partial_i\Phi_\lambda$ обозначает частную производную функции Φ_λ по i-ой координате.

Для данного $\lambda\in E$ обозначим через Y_λ множество всех решений разностного уравнения (1.1), т.е. множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{y}=(y_n)=(\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots)$, которые обладают следующими свойствами при всех $n\in\mathbb{Z}$:

1. $y_n\in Q$; and
2. $(m+1)$ последовательных координат $y_n,y_{n+1},\dots,y_{n+m}$ точки $\underline{y}$ удовлетворяют уравнению (1.1).

Один из основных результатов работы [1] состоит в следующем.

Теорема 1.1. *Пусть $\Phi_\lambda(y_n,y_{n+1},\dots,y_{n+m})=0$ — разностное уравнение с параметром $\lambda\in E$ и пусть функция $\Phi_\lambda : Q^{m+1}\to\mathbb{R}$ принадлежит классу C^1 для каждого λ и непрерывно зависит от $\lambda\in E$, и кроме того, частные производные $\partial i\Phi_\lambda$, $i=1,\dots,m+1$ также непрерывно зависит от λ. Пусть при сингулярном значении параметра $\lambda=\lambda_0$ функция Φ_{λ_0} зависит лишь от одной переменной, т.е.: $\Phi_{\lambda_0}(x_1,x_2,\dots,x_{m+1})=\varphi(x_N)$, где N – целое число из интервала $1\le N\le m+1$, а функция $\varphi:Q\to\mathbb{R}$ принадлежит классу C^1 и имеет k простых корней внутри Q.*

Тогда найдется окрестность E_0 сингулярного значения λ_0 такая, что для всех $\lambda\in E_0$ существует замкнутое, инвариантное относительно сдвига σ подмножество Γ_λ множества решений Y_λ (рассматриваемого в тихоновской топологии) со следующими свойствами:

(i) ограничение $\sigma|\Gamma_\lambda$ топологически сопряжено со схемой Бернулли $\sigma|\Sigma_k$ из k символов; в частности, $h_{top}(\sigma|Y_\lambda)\ge\log k$;

(ii) сопряжение $\bar\psi_\lambda:\Sigma_\lambda\to\Gamma_\lambda$ есть тождественное отображение при $\lambda=\lambda_0$ и непрерывно зависит от $\lambda\in E_0$; более того, отображение $\lambda\mapsto\bar\psi_\lambda(\underline{x})$ из E_0 в ℓ_∞ равномерно непрерывно;

(iii) если разностное уравнение (1.1) для данного λ порождено отображением $f_\lambda:P_\lambda\to\mathbb{R}^m$, то $h_{top}(f_\lambda)\ge\log k$ и имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma_k & \xrightarrow{\bar\psi_\lambda} & Y_\lambda & \xrightarrow{T_\lambda} & \tilde P_\lambda & \xrightarrow{\pi_0} & K_\lambda\\
\sigma\downarrow & & \sigma\downarrow & & \sigma_m\downarrow & & f_\lambda\downarrow\\
\Sigma_k & \xrightarrow[\bar\psi_\lambda]{} & Y_\lambda & \xrightarrow[T_\lambda]{} & \tilde P_\lambda & \xrightarrow[\pi_0]{} & K_\lambda
\end{array}$$

где отображение $\bar\psi_\lambda$ инъективно, T_λ биективно, а π_0 есть (сюръективная) проекция, которая представляет собой отображение, сохраняющее топологическую энтропию и взвимно однозначно на множестве периодических точек. (На диаграмме $\tilde P_\lambda=\{\underline{p}=(p_n)_{n=-\infty}^{\infty}\in P_\lambda^{\mathbb{Z}}:p_{n+1}=f_\lambda(p_n)\}$ and $K_\lambda=\bigcap_{i=0}^{\infty}f_\lambda^i(\bigcap_{n=0}^{\infty}f_\lambda^{-n}(P_\lambda))$).

2. Топологические подковы в клеточных сетях

Мы рассматриваем стационарные решения для дискретных моделей в виде клеточных сетей, моделирующих некоторые уравнения в частных производных диффузионного типа (клеточные сети, их регулярное и хаотическое поведение для подобных моделей изучались в работах [4], [5], [6], [7] и др.). Дискретная модель получается из уравнения в частных производных заменой производных по времени и пространству соответствующими разностными членами (см. [7]). В самом общем виде, пространственно-временная модель подобной дискретизации описывается уравнением вида

$$u_n^{t+1} = f(u_n^t) + \varepsilon g(u_{n-s}^t, u_{n-s+1}^t, \ldots, u_{n+s}^t), \tag{2.1}$$

где $t \in \mathbb{Z}$ играет роль временной переменной, а $n \in \mathbb{Z}$ – пространственной. В этом уравнении f называется локальной функцией, а g – функцией взаимодействия конечного порядка s.

Стационарные решения u_n^t уравнения (2.1) должны быть независимы от временнóй координаты t, т.е. $u_n^t := x_n$ для всех $t \in \mathbb{Z}$. В таком случае уравнение (2.1) сводится к разностному уравнению

$$x_n = f(x_n) + \varepsilon g(x_{n-s}, x_{n-s+1}, \ldots, x_{n+s}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

Поэтому, применяя теорему 1.1., мы получаем такой результат о хаотическом поведении стационарных решений:

Теорема 2.1. *Пусть функция $x \mapsto x - f(x)$ имеет $k > 1$ простых корней и пусть в некоторой окрестности U этих корней она является функцией класса C^1. Если функция взаимодействия g является C^1-гладкой на U^{2s+1}, то для достаточно малого ε существует замкнутое (в тихоновской топологии) σ-инвариантное подмножество Λ_ε в пространстве стационарных решений уравнения* (2.1)*, такое, что ограничение $\sigma|\Lambda_\varepsilon$ топологически сопряжено со схемой Бернулли $\sigma|\Sigma_k$ из k символов, причем отображение,реализующее сопряженность, непрерывно зависит от ε не только в тихоновской, но и в равномерной топологии.*

Таким образом, в случае выполнения естественных достаточных условий теоремы 2.1., в пространсве стационарных решений уравнения 2.1 имеется топологическая подкова из k символов, и при изменении коэффициента диффузии эта подкова изменяется непрерывно в равномерной метрике, т.е. подкова структурно устойчива, и при близких коэффициентах диффузии все пространственные координаты (от $-\infty$ до $+\infty$, а не только от $-N$ до N при фиксированном N) равномерно близки. Отметим, что, в отличие от работ [4], [5], [7], мы накладываем менее обременительные ограничения на функции f и g, а именно, мы не требуем, чтобы ти функции были определены на всем пространстве $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^{2s+1}$, соответственно, и имели оганиченные частные производные.

Дискретные модели для многих классов дифференциальных уранений в частных производных могут могут быть заданы в виде клеточных сетей, удовлетворяющих уравнению типа (2.1). В частности, к такому классу относится нелинейное уравнение реакции диффузии

$$u_t = h(u) + \varepsilon u_{xx}, \tag{2.3}$$

где ε — коэффициент диффузии. Дискретный вариант этого уравнения имеет следующий вид

$$u_n^{t+1} = u_n^t + \delta h(u_n^t) + \delta\eta^{-2}\varepsilon(u_{n+1}^t - 2u_n^t + u_{n-1}^t),$$

где δ и η — шаг дискретизации по времени и пространству, соответственно, h — нелинейная функция, t и n — временная и пространственная координаты. Таким образом, стационарные решения — это решения разностного уравнения

$$h(u_n) + \eta^{-2}\varepsilon(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = 0. \tag{2.4}$$

Частные случаи уравнения реакции диффузии имеют следующий вид:

1. *Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова* с функцией $h(u) = \alpha u(1-u)$ и параметром $\alpha > 0$;

2. *Уравнение Хаксли* с функцией $h(u) = \alpha u(1-u)(u-a)$ и параметрами $0 < a < 1$ и $\alpha > 0$;

3. *Модель Френкеля-Конторовой* с функцией $h(u) = \sin(u)$.

В качестве другого примера рассмотрим уравнение Ландау-Гинзбурга

$$u_t = h(u) + (\varepsilon + i\delta)u_{xx},$$

вещественный вариант которого имеет вид (2.3) с функцией $h(u) = u(\alpha - \beta u^2)$ и вещественными параметрами $\varepsilon, \alpha, \beta$. В уравнении Колмогорова-Петровского-Пискунова функция h имеет два простых корня (а имеено, 0 и 1), а в уравнении Хаксли и в уравнении Ландау-Гинзбурга у функции h — три простых корня, в модели Френкеля-Конторовой — не менее двух простых корней на интервале длины более π. Поэтому теорема 2.1. применима для этих уравнений при достаточно малом коэффициенте диффузии ε. Таким образом, стационарные решения этих уравнений обладают хаотическим поведением с наличием топологических подков из двух или трех символов соответственно.

Результаты работ [1], [2] применимы и в том случае, когда пространство состояний клеточной сети (решетки) многомерно. Поэтому можно рассмотреть в данном контексте многомерное уравнение реакции диффузии

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = h(\vec{u}) + \varepsilon A \Delta \vec{u},$$

где A — матрица взаимодействия. В частности, для двумерного уравнения Фитц Хью-Нагумо функция h имеет вид

$$h(u_1, u_2) = (du_1(u_1 - \theta)(1-u_1) - au_2,\ bu_1 - cu_2),$$

где $0 < \theta < 1$ и $a, b, c, d > 0$. В этом случае многомерное обобщение теоремы 2.1. применимо, поскольку функция h имеет (для невырожденных значений параметров) три различных корня, а именно

$$(0,0) \text{ и } (u_\pm, \frac{b}{c}u_\pm), \text{ где } u_\pm = \frac{1}{2}\left(1 + \theta \pm \sqrt{(1-\theta)^2 - \frac{4ab}{cd}}\right),$$

с ненулевым значением якобиана в этих корнях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м, и Правительства РФ, грант 11.G34.31.0039.

Список литературы

1. M.-C. Li, M. Malkin, “Topological horseshoes for perturbations of singular difference equations”, *Nonlinearity*, **19** (2006), 795–811.

2. J. Juang, M.-C. Li , M.I. Malkin, “Chaotic difference equations in two variables and their multidimensional perturbations”, *Nonlinearity*, **21** (2008), 1019–1040.

3. V. Afraimovich, S.-B. Hsu, *Lectures on chaotic dynamical systems. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 28*, American Mathematical Society Providence, RI; International Press, Somerville, 2003.

4. V. Afraimovich, S.-N. Chow, "Topological spatial chaos and homoclinic points of $\mathbf{z}^d$-actions in lattice dynamical systems", *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **12** (1995), 367–383.

5. V. Afraimovich, Ya. Pesin, "Travelling waves in lattice models of multi-dimensional and multi-component media: I. General hyperbolic properties", *Nonlinearity*, **6** (1993), 429–455.

6. L.A. Bunimovich, E.A. Carlen, "On the problem of stability in lattice dynamical systems", *J. Differential Equations*, **123** (1995), 213–229.

7. D.R. Orendovici, Ya.B. Pesin, *Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems. Minneapolis.*, Springer, NY pages 327–358, 2000.

8. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998.

9. D.Sterling, H.R. Dullin, J.D. Meiss, "Homoclinic bifurcations for the Henon map", *Phys. D*, **134** (1999), 153–184.

Applying the method of one-dimensional perturbations chaotic maps in cellular networks

© **M.I. Malkin**[2]

Abstract. In the paper, the presence of chaotic behavior has been shown for some classes of cellular networks which are discrete models of diffusion type equations. To this aim, the author's method for proving the existence and stability of topological horseshoes near degenerate chaotic low dimensional map has been applied.

Key Words: Difference equations, chaotic behavior of trajectories, cell network, discrete models of diffusion

[2] Assistant professor of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, malkin@mm.unn.ru