УДК 517.9

Исследование математических моделей взаимодействия многовидовых сообществ

© Т. Ф. Мамедова[1], А. А. Ляпина[2]

Аннотация. Рассматривается математическая модель экосистемы типа хищник-жертва. В работе приведены примеры исследования нелинейных динамических моделей эколого-экономических систем на устойчивость и стабилизацию по части переменных.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость по части переменных, система обыкновенных дифференциальных уравнений, эколого-экономическая система, модель «хищник-жертва», динамика экосистем.

В настоящее время большое внимание уделяется изучению методов исследования процессов эволюции различных сообществ, в том числе одной из центральных проблем математической экологии - проблеме устойчивости, стабильности экосистем. На сегодняшний день существует множество разработанных подходов решения данной задачи.

Настоящая работа посвящена изучению методом сравнения Е.В.Воскресенского [1] процессов изменения структуры взаимодействующих сообществ в экологии, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Рассматриваются системы двух и более нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется одна из основных задач системной динамики - оценка устойчивости системы.

Рассмотрим вольтеровскую модель взаимодействия n видов [6]

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(\varepsilon_i - \Sigma_{i=1}^{n} \gamma ij x_j) \tag{1.1}$$

где x_i - численность популяции i-го вида; γ_{ij} - показатель внутривидового взаимодействия $i \neq j$; ε_i - скорость естественного прироста или смертности i-го вида при отсутствии остальных видов.

Биологический смысл имеют лишь неотрицательные решения системы (1.1) . Обобщенные коэффициенты прироста в модели (1.1) обозначим через функцию:

$$G_i(x_1, ..., x_n) = \varepsilon_i - \Sigma_{i=1}^{n} \gamma ij x_j$$

Для изолированной системы численность популяции зависит от структуры видов, поэтому обозначим через $F_i(x_1, ..., x_n) x_i G(x_1, ..., x_n)$. Тогда система (1.1) примет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, ..., x_n; t), i = \bar{1, n}$$

где функции F_i описывают скорость изменения численности популяции в зависимости от структуры видовых взаимодействий и их количественных показателей. Будем решать задачу об устойчивости состояния равновесия системы методом сравнения Е.В.Воскресенского [1].

Для применения метода сравнения Е.В.Воскресенского запишем систему (1.1) в матричной форме:

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \tag{1.2}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, mamedovatf@yandex.ru.

[2] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск, lyapina@e-mordovia.ru.

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$; $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn}) \end{pmatrix}$ $f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t,x) \\ ... \\ f_n t, x) \end{pmatrix}$

Решение $x(t:t_0,x_0)$ уравнения (1.2) существует для всех начальных условий $(t_0,x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T$,$T = [0,+\infty]$. Предполагается так же, что уравнение (1.2) имеет нулевое решение, которое является единственным состоянием равновесия экосистемы, описываемой дифференциальным уравнением (1.1). Все результаты сформулируем относительно этого решения при $\bar{M}_0 = N$.

Алгоритм метода сравнения Воскресенкого состоит в следующем.

Рассмотрим уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x), \tag{1.3}$$

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{1.4}$$

где $A(\cdot) : [T,+\infty) \to Hom(R^n,R^n)$, $f \in C^{(0,1)}(R^1_+ \times R^n, R^n)$.

Решение $x(t:t_0,x_0)$ уравнения (1.3) существует для всех начальных условий $(t_0,x_0) \in T \times R^n$ и $t \in T$, $T = [0,+\infty)$.

Предположим так же, что уравнение (1.3) имеет решение $x(t) \equiv 0$.

Рассмотрим множества $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \bar{M}_0 \subseteq N$, где $N = 1,2,\ldots,n$.

Пусть выполняются условия:

1. $|f_j(t,x_j,\ldots,x_n)| \le \lambda_j(t,|x_{j_1}|,\ldots,|x_{j_q}|)$, $\forall j \in N$, $\{j_1,\ldots,j_q\} \in M_0$; $\lambda_j : [T,+\infty) \times R^q_+ \to R^1_+$, $R^1_+ = [0,+\infty)$, $\lambda_j \in C([T,+\infty) \times R^q_+)$, $\lambda_j(t,r_1,\ldots,r_i,\ldots,r_q) \le \lambda_j(t,\overline{r_1},...,\overline{r_i},...,\overline{r_q}), r_i \le \overline{r_i}$, $i = \overline{1,q}$ при всех $t \in [T,+\infty)$.

2. $R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1,...,x_n), x_j = 0, j \notin \overline{M_0}\}$.

3. Фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t)), i,j = \overline{1,n}$ нормирована в точке $t_0 \in [T_0,+\infty)$,$T_0 \ge T$, $Y^{-1}(t) = (y^{ij}(t))$, $i,j = \overline{1,n}$.

4.Эталонные функции сравнения $\mu_i : [T,+\infty) \to R^1_+$, $m_i : [T,+\infty) \to R^1_+$, удовлетворяют неравенствам

$$\mu_i \ge \max_{j \in N_0}\{|y_{ij}(t)|\},$$

$T_0 \le t_0 \le t < +\infty$, $i \in M_0$, если $N_0 \ne 0, j \in N_0$ и $\mu_i(t) \ge 0$, если $N_0 = 0$, $i \in M_0$,

$$m_i(t) \ge \max\{\max_{j \in \bar{M}_0}\{|y_{ij}(t)|\}\mu_i(t)\},$$

$T_0 \le t_0 \le t < +\infty$, $i \in M_0$.

5. Пусть

$$J_i(t,\varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in M, k \in B} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in B} \{y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds\},$$

$B = N - M$, $J_i(t,\varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in R^1_+$ и $J_i(t,\varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$ и всех $i \in M_0$.

Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T;+\infty)$.

6. Все решения уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k,j \in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t,zm(t)),$$

определены на любом компакте из $[T, +\infty)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть уравнения (1.3) и (1.4) асимптотически эквивалентны по Брауеру, условие (5) имеет место равномерно относительно $0 < c < +\infty$ при $t \to +\infty$ и $\frac{J_i(t,c)}{\mu_i(t)} \to 0$ равномерно по t при $c \to 0, \mu_i(t) \to 0, \forall t \in [T, +\infty), \forall i \in M_0$. Тогда для того, чтобы тривиальное решение уравнения (1.3) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1.4) было устойчиво (асимптотически устойчиво) по той же части переменных.

Доказательство теоремы вытекает из доказательства теоремы 5 [5].

Исследование модели взаимодействия двух сообществ.

Рассмотрим модель взаимодействия двух сообществ с постоянной общей численностью [2].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy - \gamma x^3, \\ \frac{dy}{dt} = k\beta xy - my. \end{cases} \tag{1.5}$$

здесь где x, y - численность популяций жертвы и хищника соответственно. Если популяция жертв отсутствует, то размер популяции хищников растет экспоненциально со скоростью α ; тогда как в отсутствии популяции хищника смертность популяции жертв - экспоненциально. Следовательно, коэффициентам α и β соответствует внутривидовая скорость роста численности жертв и внутривидовая скорость смертности хищников, соответственно. $\gamma > 0$, γx^3 - описывает внутривидовую конкуренцию, $g(x)$ - зависимость плотности жертв в отсутствии хищников. a, d, e, w - положительные параметры.

Для численной реализации выберем следующие параметры: $\alpha = -0,15$, $\beta = 2,5$, $\gamma = 0,1$, $k = 0,2$, $m = 0,008$.

Тогда система (1.5) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} - 0,15y_1 - 2,5y_1y_2 - 0,1y_1^3 \\ \frac{dy_2}{dt} = 0,5y_1y_2 - 0,008y_2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Точка $(0,016; 0,0131)$ - положение равновесия системы (1.6).

Сделаем замену переменных и перейдем к исследованию нулевого решения соответствующего первого линейного приближения, которое имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,1799x_1 - 0,04x_2 - 2,5x_1x_2 + 0,0048x_1^2 + 0,1_1^3 - 0,1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0,006x_1 + 0,5x_1x_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,1799x_1 - 0,04x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 0,006x_1 \end{cases} \tag{1.8}$$

Фундаментальная матрица системы (1.8) и обратная к ней имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -0,999e^{0,1777t} & -0,219e^{0,0014t} \\ -0,0338e^{0,1777t} & -0,975e^{0,014t} \end{pmatrix};$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} -1,008e^{0,1777s} & -0,226e^{0,1777s} \\ -0,034e^{0,0014s} & -1,032e^{0,0014s} \end{pmatrix}.$$

Множество $N = 1,2$, $\bar{M_0} = N$, тогда справедливы оценки [1].
$||f_1(t,x)|| \le |-2,5x_1x_2 + 0,0048x_1^2 + 0,1x_1^3 - 0,1029| \le \lambda_1(|x_1||x_2|)$,
$||f_2(t,x)|| \le |0,5x_1x_2| \le |x_1||x_2| = \lambda_2(|x_1||x_2|)$,

поэтому $M_0 = 1, 2$, $M = M_0$, $b = N - M = 0$.

Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i[T, +\infty] \to R_+^1$, $m_i : [T, +\infty) \to R_+^1$ удовлетворяют неравенства $\mu_i \geq \max_{j\in N_0} |y_{ij}(t)|, T_0 \leq t_0 \leq t < +\infty, i \in M_0$, если $N_0 \neq 0$; если N_0 , то $\mu_i \geq 0, m_i \geq \max\max_{j\in N_0} |y_{ij}|, \mu_i(t)$, $T_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ будут иметь вид:

$$\mu_1(t) = \max_{j\in N_0} |y_{11}, y_{12}| = 0,99e^{-0,177t};$$

$$\mu_2(t) = \max_{j\in N_0} |y_{21}, y_{22}| = 0,975e^{-0,0014t};$$

$$m_1(t) = \max\max_{j\in N_0} |y_{11}, y_{12}|, \mu_1(t) = 0,99e^{-0,177t};$$

$$m_2(t) = \max\max_{j\in N_0} |y_{21}, y_{22}|, \mu_2(t) = 0,975e^{-0,0014t}.$$

Рассмотрим $J_i(t,\varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j\in N,k\in B} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds - \int_t^{+\infty} \sum_{j\in N,k\in M} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds.$

Выражение $J_i(t,\varphi)$ существует $\forall i \in N, c \in R_+^1$ и $J_i(t,\varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T; +\infty)$.

$J_1(t,\varphi) = -\int_t^{+\partial}(y_{11}y^{11}f_1 + y_{12}y^{12}f_1 + y_{11}y^{21}f_2 + y_{12}y^{22}f_2)ds = -0,95e^{0,177t}\int_t^{+\partial} e^{-0,0014s}ds + 0,42e^{-0,0014t}ds - 0,21e^{-0,177t}\int_t^{+\partial} e^{0,177s}ds + 0,21e^{-0,0014t}\int_t^{+\partial} e^{-0,177s}ds$

$J_2(t,\varphi) = -\int_t^{+\partial}(y_{21}y^{12}f_1 + y_{22}y^{12}f_1 + y_{21}y^{21}f_2 + y_{22}y^{22}f_2)ds = -0,006e^{0,177t}\int_t^{+\partial} e^{-0,0014s}ds - 0,2e^{-0,0014t}ds - 0,0009e^{-0,177t}\int_t^{+\partial} e^{0,177s}ds - 0,96e^{-0,0014t}\int_t^{+\partial} e^{-0,177s}ds$

Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum_{k\in N,j\in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t, zm(t))$ определены на компакте $[T_0, t_0]$.

$\frac{dz}{dt} = \sum_{k\in N,j\in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t, zm(t)) = 0,749e^{-0,34t} + 0,88e^{-0,17t}$,
$z = -2,2e^{-0,34t} - 5,134e^{-0,17t}$.

Отсюда следует, что каждое решение системы (1.8) определено на требуемом множестве. Таким образом, условия теоремы 1 [1] выполняются. Так как система уравнений (1.8) асимптотически устойчива по переменным, то тривиальное решение системы уравнений (1.6) обладает этим же свойством по всем переменным.

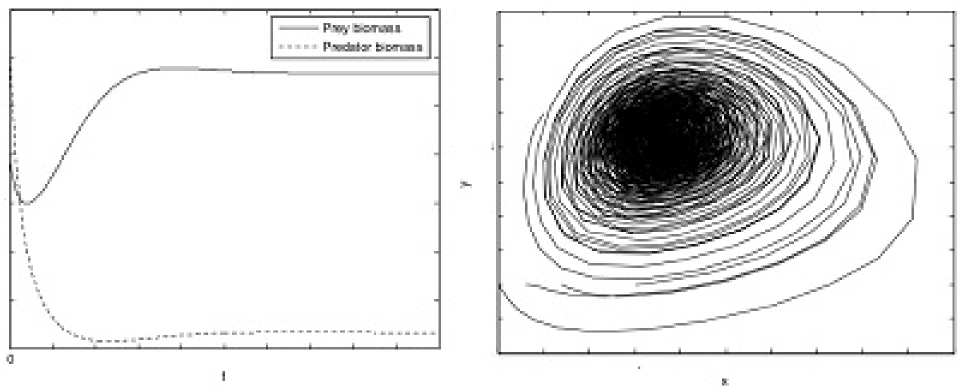

Рисунок **1.1**

Время эволюции всей популяции для системы (1.5) модели «хищник-жертва»

Исследование модели взаимодействия трех сообществ

Для проведения исследования модели взаимодействия трех сообществ рассмотрим [3]. Система дифференциальных уравнений первого порядка (модель Лотки-Вольтерра), описывающая динамику системы «хищник-жертва», имеет следующий вид [4]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx(1-\frac{x}{K}) - a_1xy - \omega_1 xz, \\ \frac{dy}{dt} = sy(1-\frac{y}{L}) - a_2xy - \frac{\omega_1 yz}{m+y}, \\ \frac{dz}{dt} = b_1\varpi_1 xz + b_2\varpi_2\frac{yz}{m+y} - cz. \end{cases} \tag{1.9}$$

здесь где x , y , z - плотности популяций хищника и двух жертв, предполагается, что все параметры постоянны и неотрицательны; r и s - темпы роста двух видов жертв соответственно; K - емкость среды; L - нижняя критическая численность; c - скорость естественной гибели популяции хищников в единицу времени в расчете на одного хищника в отсутствии жертв; a_1 и a_2 - эффективный коэффициент популяционного роста численности двух видов жертв соответственно (выражают влияние на скорости роста - гибели каждой популяции при наличии другой популяции); ω_1 , ω_2 - коэффициенты роста численности хищника за счет потребления жертв; b_1 , b_2 - коэффициенты естественной смертности хищника связанные с темпами роста популяции жертв (коэффициенты преобразования, обозначающие число (недавно) родившихся хищников для каждого захваченного вида жертв.

Емкость среды ограничена величиной K , и безграничный рост жертв в отсутствии хищника невозможен. Существует нижняя критическая численность жертв L , и если число особей падает по каким-либо причинам ниже L , популяция вымирает. Для численной реализации выберем следующие параметры:

$r = 3,5$; $K = 150$; $a_1 = 0,001$; $\varpi_1 = 0,24$; $s = 4,5$; $L = 150$; $a_2 = 0,1$; $\varpi_0, 21$; $m = 15$; $b_1 = 0,5$; $b_2 = 0,6$; $c = 3,9$.

Тогда система (1.9) примет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3,5x(1-\frac{x}{150}) - 0,001xy - 0,24xz, \\ \frac{dy}{dt} = 4,5y(1-\frac{y}{150}) - 0,1xy - \frac{0{,}21yz}{15+y}, \\ \frac{dz}{dt} = 0,5\cdot 0,24xz + 0,6\cdot 0,21\frac{yz}{15+y} - 3,9z. \end{cases} \tag{1.10}$$

Точка $(31,72; 42,89; 11,32)$ - положение равновесия системы. Сделаем замену переменных и перейдем к исследованию нулевого решения :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,702x_1 - 0,03x_2 + 7,61x_3 - 0,023x_1^2 - 0,01x_1x_2 - 0,24x_1x_3 + 0,35, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4,28x_1 - 1,24x_2 - 0,03x_2^2 - 0,1x_1x_2 - \frac{0{,}21x_2x_3+2{,}3x_2+3x_3+101{,}95}{x_2+57{,}89} + 1,86, \\ \frac{dx_3}{dt} = 1,35x_1 - 0,1x_3 + 0,12x_1x_3 + \frac{0{,}126x_2+11{,}12}{15x_2+643{,}35} - 1,14. \end{cases} \tag{1.11}$$

Соответствующее первое линейное приближение имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -0,702x_1 - 0,03x_2 + 7,61x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = -4,28x_1 - 1,24x_2, (4.7) \\ \frac{dx_3}{dt} = 1,35x_1 - 0,1x_3. \end{cases} \tag{1.12}$$

Фундаментальная матрица системы (1.12) и обратная к ней имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 0,65e^{-2,83t} & 0,47e^{-3,64t} & 0,03e^{-1,22t} \\ -0,69e^{-2,83t} & -0,86e^{-3,64t} & e^{-1,22t} \\ -0,3e^{-2,83t} & 0,18e^{-3,64t} & -0,004e^{-1,22t} \end{pmatrix},$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 0,65e^{2,83s} & -0,02e^{0,283s} & -1,84e^{2,83s} \\ 1,12e^{3,64s} & -0,02e^{3,64s} & 2,49e^{3,64s} \\ 1,42e^{1,22s} & 0,87e^{1,22s} & 0 \end{pmatrix}.$$

Множество $N = 1,2,3$, $\bar{M}_0 = N$. Тогда справедливы оценки [1].

$$||f_1(t,x)|| \leq |-0,023x_1^2 - 0,01x_1x_2 - 0,24x_1x_3 + 0,35| \leq |x_1|^2|x_3| = \lambda_1(|x_1|,|x_3|),$$

$$||f_2(t,x)|| \leq |-0,023x_1^2 - 0,01x_1x_2 - 0,24x_1x_3 + 0,35| \leq |x_1||x_2|^2 = \lambda_2(|x_1|,|x_2|),$$

$$||f_3(t,x)|| \leq |0,12x_1x_3 - 1,14 + \frac{0,126x_2 + 11,12}{15x_2 + 643,35}| \leq |x_1||x_2||x_3| = \lambda_3(|x_1||x_2||x_3|).$$

поэтому $M_0 = 1,2,3$ $, M = M_0$, $B = N - M = 0$. Тогда эталонные функции сравнения $\mu_i : [T,+\infty) \to R^1_+, m_i : [T,+\infty) \to R^1_+$ удовлетворяют неравенствам $\mu_i \geq \max_{j\in N_0}|y_{ij}(t)|$, $T \leq t_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ если $N_0 \neq 0$; если $N_0 = 0$, то $\mu_i \geq 0$, $m_i(t) \geq \max\max_{j\in\bar{M}_0|y_{ij}|,\mu_i(t)}$, $T_0 \leq t < +\infty$, $i \in M_0$ и будет иметь вид:

$$\mu_1(t) = \max_{j\in N_0}|y_{11}(t), y_{12}(t), y_{13}(t)| = 0,03e^{-1,22t},$$

$$\mu_2(t) = \max_{j\in N_0}|y_{21}(t), y_{22}(t), y_{23}(t)| = e^{-1,22t},$$

$$\mu_3(t) = \max_{j\in N_0}|y_{31}(t), y_{32}(t), y_{33}(t)| = 0,004e^{-1,22t},$$

$$m_1(t) = \max\max_{j\in N_0}|y_{11}(t)|, |y_{12}(t)|, |y_{13}(t)|, \mu_1(t) = 0,03e^{-1,22t},$$

$$m_2(t) = \max\max_{j\in N_0}|y_{21}(t)|, |y_{22}(t)|, |y_{23}(t)|, \mu_2(t) = e^{-1,22t},$$

$$m_3(t) = \max\max_{j\in N_0}|y_{31}(t)|, |y_{32}(t)|, |y_{33}(t)|, \mu_3(t) = 0,004e^{-1,22t},$$

Рассмотрим $J_i(t,\varphi) = \int_{t_0}^{t}\sum_{j\in N,k\in B} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds - \int_t^{+\infty}\sum_{j\in N,k\in M} y_{ik}(t)y^{jk}(s)f_j(s,\varphi(s))ds.$

Выражение $J_i(t,\varphi)$ существует $\forall i \in N$, $c \in R^1_+$ и $J_i(t,\varphi) = o(\mu_i(t))$ при $t \to +\infty$. Несобственные интегралы сходятся равномерно по t на любом компакте из $[T;+\infty)$.

$J_1(t,\varphi) = -\int_t^{+\partial}(y_{11}y^{11}f_1 + y_{12}y^{12}f_1 + y_{13}y^{13}f_1 + y_{11}y^{21}f_2 + y_{12}y^{22}f_2 + y_{13}y^{23}f_2 + y_{11}y^{31}f_3 + y_{13}y^{33}f_3 + y_{12}y^{32}f_3)ds = -0,000036(0,42e^{2,83t} - 0,009e^{-3,64t} - 0,05e^{-1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-0,83s}ds - 0,009e^{-3,64t} - 0,05e^{-1,22t}\int_t^{+\infty}e^{-1,22t} - 0,03(0,56e^{-2,83t} - 0,0009e^{-3,64t} + 0,07e^{-1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-2,44s}ds - 0,000012(0,92e^{-2,83t} + 0,02e^{-1,22t} + 0,45e^{-3,64t})\int_t^{+\infty}e^{-2,44s}ds,$

$J_2(t,\varphi) = -\int_t^{+\partial}(y_{21}y^{12}f_1 + y_{22}y^{12}f_1 + y_{23}y^{13}f_1 + y_{21}y^{21}f_2 + y_{22}y^{22}f_2 + y_{23}y^{23}f_2 + y_{23}y^{33}f_3 + y_{21}y^{31}f_3 + y_{22}y^{32}f_3)ds = -0,0000036(0,44e^{-2,83t} + 0,01e^{-3,64t} + 1,84e^{-1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-0,083s}ds + 0,03(0,77e^{-2,83t} - 0,01e^{-3,64t} - 2,49e^{-1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-0,02s}ds - 0,00012(0,87e^{-1,22t} - 0,97e^{-2,83t} - 0,82e^{-3,64t})\int_t^{+\infty}e^{-2,44}ds,$

$J_3(t,\varphi) = -\int_t^{+\partial}(y_{31}y^{11}f_1 + y_{32}y^{12}f_1 + y_{33}y^{13}f_1 + y_{31}y^{21}f_2 + y_{32}y^{22}f_2 + y_{33}y^{23}f_2 + y_{31}y^{31}f_3 + y_{32}y^{32}f_3 + y_{33}y^{33}f_3)ds = 0,0000036(0,7e^{-1,22t} - 0,19e^{-2,83t} - 0,03e^{-3,64t}) + \int_t^{+\infty}e^{-0,83s} + 0,03(0,03e^{-2,83t} + 0,003e^{-3,64t} + 0,001e^{-1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-0,02s}ds + 0,000012(0,42e^{-2,83t} - 0,17e^{-3,64t} + 0,003e^{1,22t})\int_t^{+\infty}e^{-2,44s}ds,$

Все решения уравнения $\frac{dz}{dt} = \sum_{k\in N, j\in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t, zm(t))$ определены на компакте $[T_0, t_0]$.

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{k\in N, j\in N} |y^{jk}(t)|\lambda_j(t, zm(t)) = 0,000009e^{-0,83t} + 0,1e^{-0,02t} + 0,0003e^{-2,44t},$$

$z = -0,0001e^{-2,44t} - 0,000014e^{-0,83t} - 5,2e^{-0,02t}$.

Отсюда следует, что каждое решение системы (1.9) определено на множестве $[T_0, +\infty)$. Таким образом, условия теоремы 1 [1] выполняются. Так как система уравнений (1.12) асимптотически устойчива по переменным x_1, x_2, x_3, то тривиальное решение системы уравнений (1.11) обладает этим же свойством по всем переменным. Графическая иллюстрация результата приведена на рисунке (1.2):

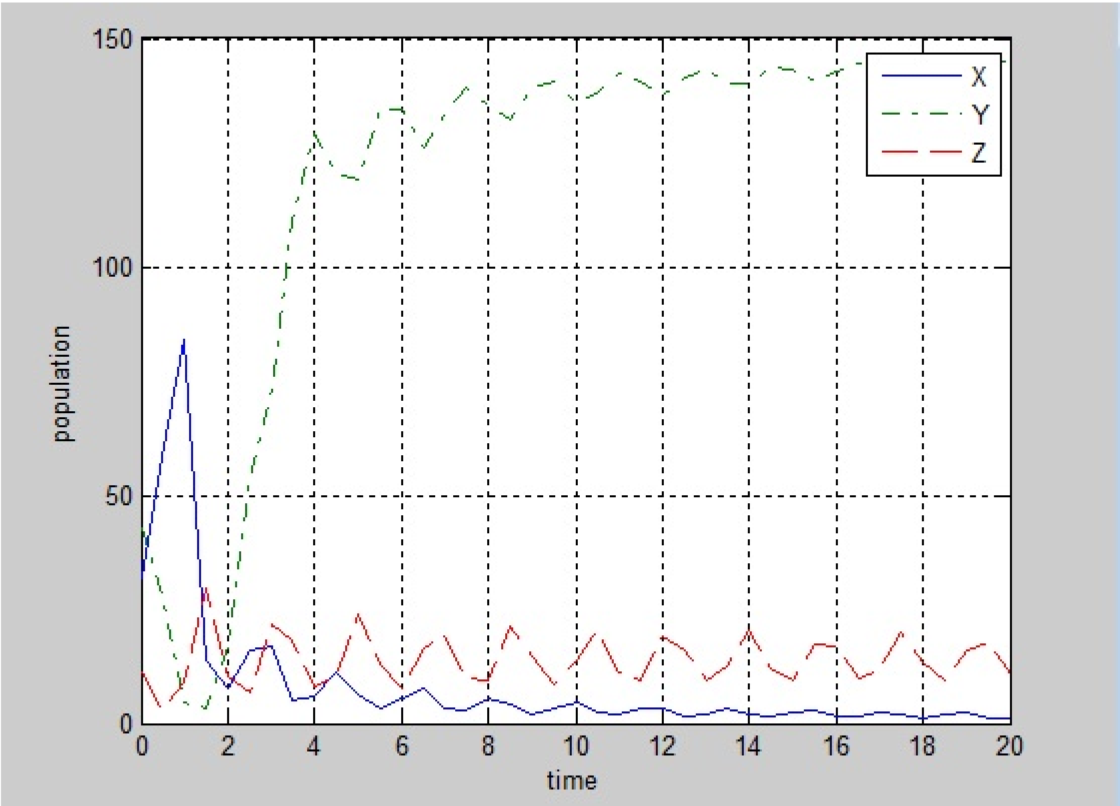

Рисунок **1.2**

Время эволюции всей популяции для системы (4.5) модели «хищник-жертва». Зона наблюдений точка положительного равновесия $(31,72; 42,89; 11,32)$.

Таким образом, условия теоремы 1 выполняются.

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Асимптотические методы: Теория и приложения*, Средне-волжское математическое общество, Саранск, 2001, 300 с.

2. Yuejian Jie, Yuan Yuan, “Model Stability Analysis of Marine Ecosystem”, *International Journal of Biology*, **1**:2 (2009), 22–25.

3. Kar T. K., Chakraborty Kunal., “Bioeconomic modelling of a prey predator system using differential algebraic equitation”, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, **2**:1 (2010), 13–34.

4. Kar T. K., Ashim Batabyal, “Persistence and stability of a two prey one predator system”, *International Journal of Engineering, Science and Technology*, **2**:2 (2010), 174–190.

5. Воскресенский Е. В., Мамедова Т. Ф., “Асимптотические методы для части компонент решений дифференциальных уравнений”, *Труды семинара по диф.уравнениям Мордовского университета*, **4**:2 (1992), 6–12.

6. Петросян Л. А., Захаров В. В., *Введение в математическую экологию*, Изд-во ЛГУ, Л, 1986, 222 с.

7. Горстко А. Б., Угольницкий Г. А., *Введение в моделирование эколого - экономических систем*, Издательство РГУ, Ростов на Дону, 1990, 112 с.

Study of mathematical models of interaction between multi-species communities

© T. F. Mamedova[3] A. A. Lyapina[4]

Abstract. In the article new approach is suggested ti the solution stability investigation for the one class of differential equations of Lotka-Volterra type.

Key Words: differential equations of Volterra type, stability, asymptotic stability with respect to par of variables

[3] Associate professor of Applied Mathematics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk, mamedovatf@yandex.ru.

[4] Postgraduate student of Applied Mathematics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk, lyapina@e-mordovia.ru