

УДК 517.938.5

О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа

© С. Х. Капкаева¹

Аннотация. В работе найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек. В качестве полного топологического инварианта используется трехцветный граф, являющийся обобщением аналогичного понятия введенного в работе [4] для потоков Морса-Смейла на поверхностях.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологически сопряженные диффеоморфизмы, трехцветный граф

1. Основные понятия и формулировка результатов

Неблуждающее множество диффеоморфизма f будем обозначать Ω_f . Представим $\Omega_f = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_i(f)$ - множество неподвижных точек диффеоморфизма f индекса i ($i = 0, 1, 2$), то есть $\Omega_0(f)$, $\Omega_1(f)$, $\Omega_2(f)$ - множества стоковых, седловых, источников точек диффеоморфизма f соответственно.

Через L_f обозначим множество сепаратрис седловых неподвижных точек диффеоморфизма f .

О п р е д е л е н и е 1.1. Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется диффеоморфизмом Морса - Смейла на многообразии M^n , если:

1. неблуждающее множество Ω_f гиперболично и конечно (то есть состоит из конечного числа периодических точек, для которых модули собственных значений матрицы Якоби не равны единице);
2. для любых различных периодических точек p, q устойчивое многообразие W_p^s и неустойчивое многообразие W_q^u либо не пересекаются, либо трансверсальны в каждой точке пересечения.

Заметим, что для любого диффеоморфизма Морса-Смейла пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ состоит в точности из одной точки p , так как в противном случае это привело бы к бесконечности неблуждающего множества. Однако для различных периодических точек p, q пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ может быть непустым множеством. Если $\dim W_p^s + \dim W_q^u = n$, то каждая точка, принадлежащая $W_p^s \cap W_q^u$, называется гетероклинической, если $\dim W_p^s + \dim W_q^u > n$, каждая компонента связности $W_p^s \cap W_q^u$ называется гетероклинической компонентой.

О п р е д е л е н и е 1.2. Диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$.

¹ Студент математического факультета, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

О п р е д е л е н и е 1.3. Два сохраняющих ориентацию диффеоморфизма $f, f' : M^n \rightarrow M^n$ называются топологическими сопряженными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$ такой, что $f' = hfh^{-1}$.

В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на двумерном ориентируемом многообразии M^2 , удовлетворяющих следующим условиям:

1. множество Ω_f ($f \in G$) состоит из неподвижных точек и ограничение диффеоморфизма на неустойчивое многообразие любой седловой неподвижной точки сохраняет ориентацию.
2. диффеоморфизм f является градиентно-подобным.²

Для топологической классификации потоков Морса-Смейла на двумерном многообразии на поверхностях М. Пейкшото [5] ввел понятие различающего графа. Этот инвариант явился обобщением схемы потока, введенной Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майером для потоков с конечным числом особых траекторий, определенных в ограниченной части плоскости [3]. Основным результатом работы [5] является утверждение о том, что различающий граф, является полным топологическим инвариантом для потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях (с точностью до траекторной топологической эквивалентности). Результат Пейкшото был обобщен В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных для градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях [1]. Следует отметить, что проверка изоморфности графов Пейкшото является достаточно громоздким процессом, что связано с наличием различающих подмножеств. В работе [4] А. А. Ошемков и В. В. Шарко предложили поставить в соответствие градиентно-подобному потоку Морса-Смейла на поверхности трехцветный граф, который также является полным топологическим инвариантом, но по сравнению с графом Пейкшото, описание и проверка изоморфности трехцветных графов является значительно более простой.

Следуя работе [4], поставим в соответствие каждому диффеоморфизму $f \in G$ трехцветный граф и докажем, что он является полным топологическим инвариантом, классифицирующим градиентно-подобные диффеоморфизмы на двумерных многообразиях.

О п р е д е л е н и е 1.4. Граф Γ называется *трехцветным графом*, если все его вершины имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Цвета будем обозначать буквами s, t, u .

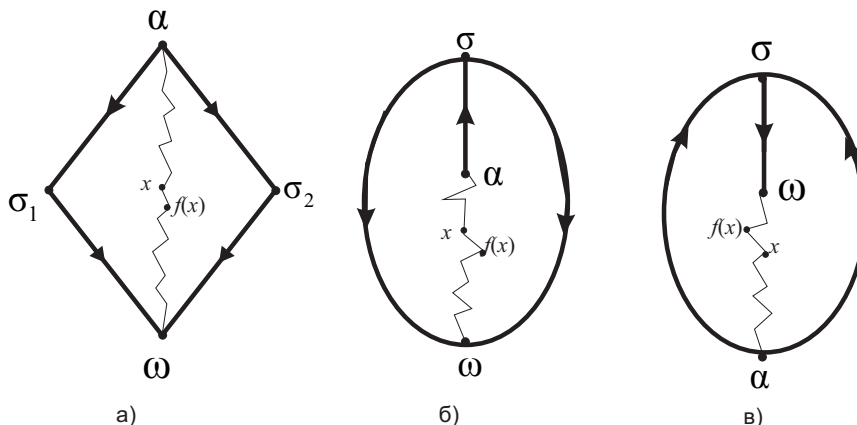
О п р е д е л е н и е 1.5. Два трехцветных графа Γ и Γ' назовем *изоморфными*, если они изоморфны с сохранением раскраски (т.е. при изоморфизме ребра помеченные буквами s, t, u переходят в ребра помеченные теми же буквами). Для краткости будем называть эти ребра s -ребрами, t -ребрами и u -ребрами.

Опишем процедуру сопоставления каждому градиентно-подобному диффеоморфизму некоторого трехцветного графа.

Пусть f - градиентно-подобный диффеоморфизм на поверхности M^2 , имеющий хотя бы одну седловую особую точку. Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых неподвижных точек

² Так как M^2 двумерное многообразие, то условие градиентно-подобности эквивалентно тому, что пересечение $W_p^s \cap W_q^u$ является пустым, для любых различных точек p, q из множества $\Omega(f)$.

диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через \tilde{M} , то есть $\tilde{M} = M^2 \setminus \bigcup_{p \in \Omega_1} (W_p^u \cup W_p^s)$, где Ω_1 – множество всех седловых точек. Тогда множество \tilde{M} представляется в виде объединения открытых областей (ячеек), гомеоморфных открытому стандартному диску, то есть множеству $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Аналогично [3] устанавливается, что граница каждой области из множества \tilde{M} имеет один из видов, изображенных жирными линиями на рис. 1.1 и содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис.

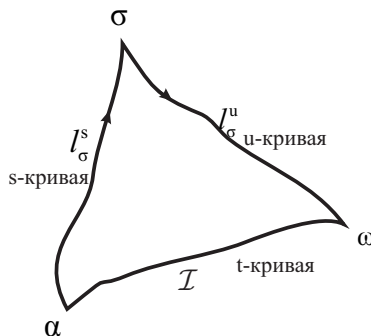


Р и с у н о к 1.1

Разбиение ячеек на треугольные области

Пусть A - любая ячейка из множества \tilde{M} , α и ω - источник и сток, входящие в ее границу, сделаем следующее построение. Для любой стоковой точки ω диффеоморфизма f обозначим через L_ω - множество сепаратрис седловых неподвижных точек, содержащих ω в своем замыкании.

Из леммы 3.2.1 работы [2] следует, что существует гладкий диск B_ω такой, что $\omega \in B_\omega \subset W_\omega^s$, причем $int f(B_\omega) \subset B_\omega$, и любая сепаратриса $l \in L_\omega$ пересекает ∂B_ω в единственной точке. Выберем произвольную точку x на границе диска B_ω , принадлежащую внутренности ячейки A . Положим $y = f(x)$ и соединим точки x и y произвольной простой кривой μ (кривой без самопересечений). Положим $\mathcal{I} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mu)$. Тогда замыкание \mathcal{I} является простой кривой, граничные точки которой состоят из точек α и ω . Будем называть ее t - кривой (рис. 1.1).



Р и с у н о к 1.2

Треугольная область

Множество $A \setminus \mathcal{I}$ в точности состоит из двух компонент связности, в границу каждой из которых входят: три неподвижные точки - источник α , седло σ , сток ω , а также

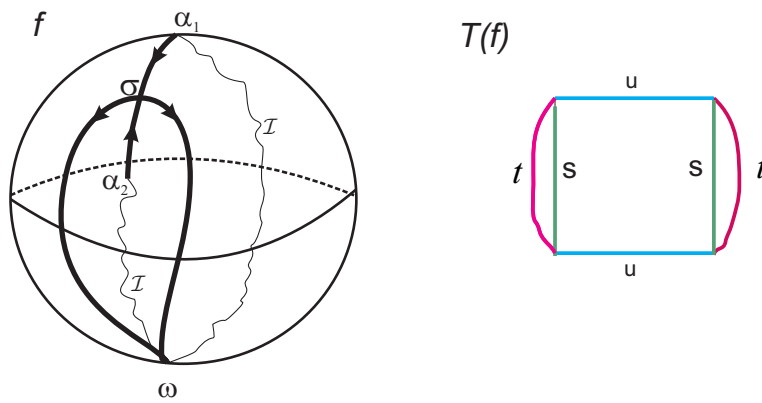
устойчивая сепаратриса l_σ^s (будем называть ее s -кривой) с граничными точками α и σ , неустойчивая сепаратриса l_σ^u (u -кривая) с граничными точками ω и σ и кривая \mathcal{I} (t -кривая) с граничными точками α и σ (рис. 1.2).

Каждую из компонент связности множества $A \setminus \mathcal{I}$ будем называть треугольной областью или просто треугольником. Положим Δ множество всех треугольных областей диффеоморфизма f .

Обозначим через \mathcal{T} множество t -кривых, построенных во всех ячейках множества \tilde{M} . Положим $M_1 = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}$, тогда M_1 представляется в виде объединения треугольных областей.

Стороной треугольной области назовем замыкание одной из s , u или t компонент связности границы.

Будем говорить, что две треугольные области, имеют общую сторону, если она принадлежит замыканиям обеих треугольников.



Р и с у н о к 1.3

Построим трехцветный граф $T(f)$, соответствующий полученному разбиению M_1 на треугольники следующим образом:

- 1) вершины графа T взаимно-однозначно соответствуют треугольникам разбиения M_1 ;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t или u , если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую сторону s , t или u типа.

На рис. 1.3 приведен фазовый портрет простейшего диффеоморфизма Морса-Смейла на двумерной сфере и соответствующий ему трехцветный граф.

Основным результатом работы является теорема 1.1.

Т е о р е м а 1.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их трехцветные графы $T(f), T(f')$ изоморфны.*

2. Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть даны два топологически сопряженных диффеоморфизма $f, f' \in G$, то есть существует гомеоморфизм h , такой, что $f' = hfh^{-1}$. Построим для диффеоморфизма f трехцветный граф и обозначим его через $T(f)$. Для каждой инвариантной t -кривой \mathcal{I} , участвующей в построении графа $T(f)$ и принадлежащей

некоторой ячейке A из множества $\tilde{M}_f = M^2 \setminus \overline{\bigcup_{p \in \Omega_1} (W_p^u \cup W_p^s)}$, положим $\mathcal{I} = h(\mathcal{I})$. Так как h сопрягающий гомеоморфизм, то он преобразует ячейку A в ячейку $A' = h(A)$ из множества $\tilde{M}_{f'} = M^2 \setminus \overline{\bigcup_{h(p) \in \Omega'_1} (W_{h(p)}^u \cup W_{h(p)}^s)}$. По построению кривая \mathcal{I}' принадлежит ячейке A' . Так как h преобразует замыкания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых неподвижных точек диффеоморфизма f в замыкания устойчивых и неустойчивых многообразий седловых неподвижных точек диффеоморфизма f' , то он отображает каждую треугольную область разбиения \tilde{M}_f в треугольную область разбиения $\tilde{M}_{f'}$ с сохранением типа ее границы.

Обозначим через $T(f')$ граф, построенный для диффеоморфизма f' по разбиению с использованием кривых \mathcal{I}' . Покажем, что графы $T(f)$ и $T(f')$ изоморфны. Пусть $\Delta(\Delta')$ — множество всех треугольных областей диффеоморфизма $f(f')$, $\Gamma(\Gamma')$ — множество всех вершин трехцветного графа $T(f)(T(f'))$ и $\pi : \Delta \rightarrow \Gamma$ ($\pi' : \Delta' \rightarrow \Gamma'$) отображение, которое ставит в соответствие каждой треугольной области диффеоморфизма $f(f')$ вершину графа $T(f)(T(f'))$. Тогда отображение $\eta = \pi' h \pi^{-1}$ является взаимно-однозначным соответствием между множествами Γ и Γ' . Покажем, что η является изоморфизмом трехцветных графов, для этого достаточно показать, что если две вершины a, b инцидентны ребру γ^ν (определенного цвета $\nu \in \{s, t, u\}$), то вершины $a' = \eta(a)$ и $b' = \eta(b)$ инцидентны некоторому ребру γ'^ν того же цвета.

Вершинам a и b инцидентным ребру γ^ν соответствуют две треугольные области $\Delta_a = \pi^{-1}(a)$ и $\Delta_b = \pi^{-1}(b)$, имеющие общую сторону τ^ν (τ того же цвета, что и γ^ν). Области Δ_a и Δ_b преобразуются под действием гомеоморфизма h в треугольные области $h(\Delta_a)$ и $h(\Delta_b)$ с общей стороной τ'^ν . Это означает, что вершины a и b , инцидентные ребру τ^ν , под действием $\eta = \pi' h \pi^{-1}$ преобразуются в вершины $a' = \pi'(h(\Delta_a))$ и $b' = \pi'(h(\Delta_b))$ графа $T(f')$, инцидентные ребру γ'^ν .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Достаточность

Прежде чем приступить к доказательству достаточности, докажем следующую лемму.

Положим $M_2 = M^2 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_1} W_\sigma^s$, $M'_2 = M^2 \setminus \bigcup_{\sigma' \in \Omega'_1} W_{\sigma'}^s$.

Л е м м а 2.1. Пусть трехцветные графы $T(f)$ и $T(f')$ диффеоморфизмов f и f' соответственно изоморфны, тогда существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M_2 \rightarrow M'_2$, такой что $\tilde{h}f = f'\tilde{h}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для стоковой неподвижной точки ω диффеоморфизма f обозначим через L_ω множество всех t и u кривых, для которых ω является граничной точкой и через n_ω - число кривых принадлежащих L_ω .³ Введем аналогичные обозначения $L_{\omega'}$ и $n_{\omega'}$ для стока ω' диффеоморфизма f' .

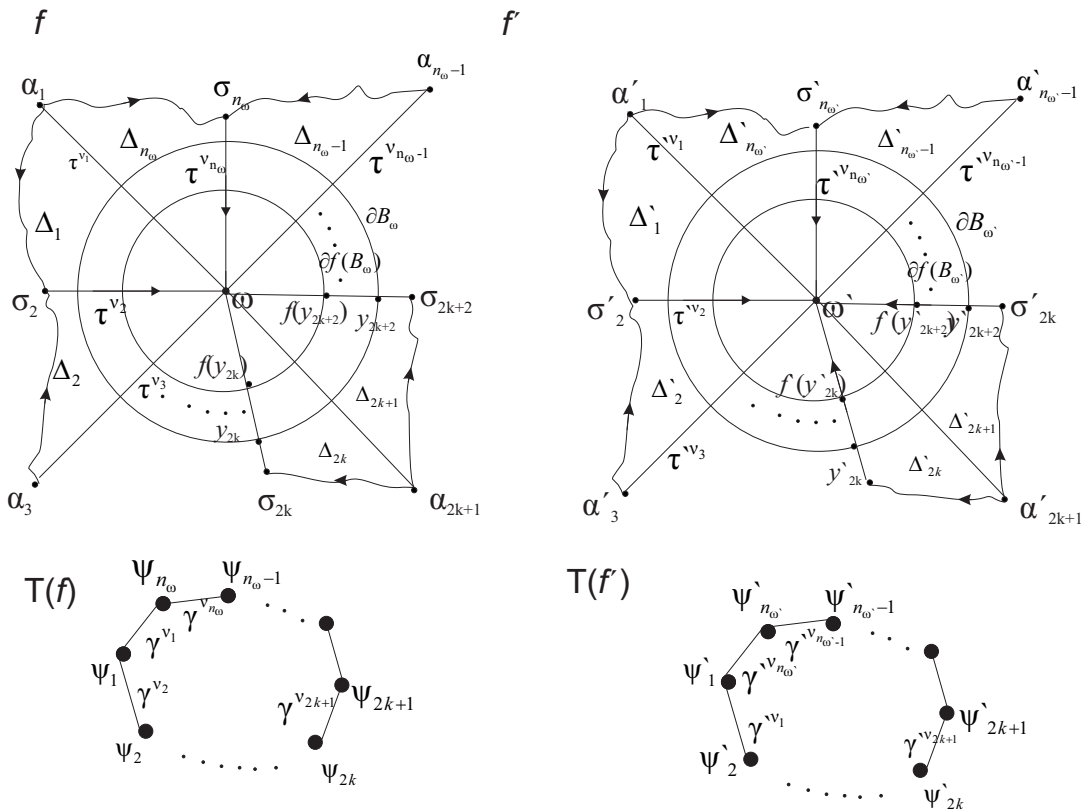
Аналогично лемме 3.2.1 работы [2], устанавливается, что существует гладкий замкнутый диск $B_\omega \subset W_\omega^s$, такой что $\omega \in \text{int} B_\omega$, $f(B_\omega) \subset B_\omega$ и любая кривая $\tau_\omega^\nu \in L_\omega$ (где ν - цвет ребра, $\nu \in \{u, t\}$) пересекает кривую $c_\omega = \partial B_\omega$ в единственной точке. Зададим в некоторой точке кривой c_ω пару векторов $(\vec{\theta}; \vec{n})$ такую, что вектор \vec{n} направлен внутрь диска B_ω , вектор $\vec{\theta}$ касается кривой c_ω и задает на ней направление обхода,

³ По построению число n_ω четное. Действительно, число сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании совпадает с числом ячеек множества \tilde{M} , также содержащих ω в своем замыкании. В каждой такой ячейке была выбрана в точности одна t -кривая. Таким образом число n_ω совпадает с удвоенным числом ячеек множества \tilde{M} , содержащих ω в своем замыкании.

при котором диск B_ω остается слева (назовем такой обход положительным). Занумеруем кривые, пересекающие $c_\omega : \tau_\omega^{\nu_1}, \tau_\omega^{\nu_2}, \dots, \tau_\omega^{\nu_{n_\omega}}$ в соответствии с порядком, в котором они встречаются при выбранном обходе вдоль c_ω , начиная с некоторой кривой из множества L_ω . Для определенности положим, что $\tau_\omega^{\nu_1}$ имеет цвет t . Рассмотрим треугольную область, сторонами которой являются кривые $\tau_\omega^{\nu_{2k-1}}$ и $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ $k = \overline{1, n_\omega/2}$ и устойчивая сепаратриса l_σ^s , где $\sigma \in \tau_\omega^{\nu_{2k}}$, присвоим этой треугольной области номер $2k - 1$ и обозначим ее Δ_{2k-1} . Области со сторонами $\tau_\omega^{\nu_1}$ и $\tau_\omega^{\nu_{n_\omega}}$ присвоим номер n_ω . Заметим, что кривые $\tau_\omega^{\nu_{2k-1}}$ и $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ $k = \overline{1, n_\omega/2}$ имеют разный цвет, так как они являются сторонами одной треугольной области (ранее было указано что, все стороны одной треугольной области имеют разный цвет). Таким образом все $\tau_\omega^{\nu_{2k-1}}$ кривые будут t -кривыми, $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ - u -кривыми.

Обозначим через $\Gamma_\omega \subset \Gamma$ множество вершин трехцветного графа $T(f)$, которым соответствуют треугольные области диффеоморфизма f , содержащие ω в своих замыканиях и положим $\psi_i = \pi^{-1}(\Delta_i)$, где $i = \overline{1, n_\omega}$.

Отображение π переводит треугольные области Δ_{2k-1} и Δ_{2k} , имеющие общую сторону $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$, в вершины $\psi_{2k-1} = \pi(\Delta_{2k-1})$ и $\psi_{2k} = \pi(\Delta_{2k})$ трехцветного графа, которые инцидентны некоторому ребру, которое обозначим $\gamma^{\nu_{2k}}$. В силу изоморфизма графов вершины ψ_{2k-1} и ψ_{2k} графа $T(f)$ перейдут в вершины $\psi'_{2k-1} = \eta(\psi_{2k-1})$ и $\psi'_{2k} = \eta(\psi_{2k})$ графа $T(f')$, инцидентные ребру $\gamma^{\nu_{2k}} = \eta(\gamma^{\nu_{2k}})$. Вершинам ψ'_{2k-1} и ψ'_{2k} трехцветного графа $T(f')$ соответствуют треугольные области $\Delta'_{2k-1} = \pi'^{-1}(\psi'_{2k-1})$ и $\Delta'_{2k} = \pi'^{-1}(\psi'_{2k})$ диффеоморфизма f' , граничащие по ребру $\tau_{\omega'}^{\nu_{2k}}$.



Р и с у н о к 2.1

Таким образом отображение $h = \pi'^{-1}\eta\pi$ ставит в соответствие треугольным областям Δ_{2k-1} и Δ_{2k} , граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$, диффеоморфизма f треугольные области $\Delta'_{2k-1} = h(\Delta_{2k-1})$ и $\Delta'_{2k} = h(\Delta_{2k})$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\nu_{2k}}$, диффеоморфизма f' , где $k = \overline{1, n_\omega/2}$. Треугольным областям Δ_{n_ω} и Δ_1 , граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_1}$, ставятся

в соответствие треугольные области $\Delta'_{n_\omega} = h(\Delta_{n_\omega})$ и $\Delta'_1 = h(\Delta_1)$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\nu_1}$.

Для кривых $c_\omega = \partial B_\omega$ и $c_{\omega'} = \partial B_{\omega'}$ положим, что $y_{2k} = (c_\omega \cap \tau_{\omega'}^{\nu_{2k}})$ ($k = \overline{1, n_\omega \setminus 2}$) и $y'_{2k} = (c_{\omega'} \cap \tau_{\omega'}^{\nu'_{2k}})$ ($k = \overline{1, n_{\omega'} \setminus 2}$).

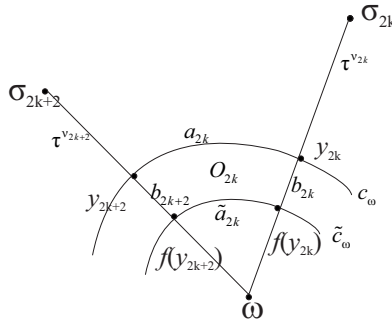
Пусть h_c произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h_c : c_\omega \rightarrow c_{\omega'}$, такой, что $h_c(y_{2k}) = y'_{2k}$, где $k = \overline{1, n_\omega \setminus 2}$.

Рассмотрим границу диска $\tilde{c}_\omega = \partial f(B_\omega)$, тогда $f(y_{2k}) = (\tilde{c}_\omega \cap \tau_{\omega'}^{\nu_{2k}})$ ($k = \overline{1, n_\omega \setminus 2}$). Определим отображение $h_{\tilde{c}} : \tilde{c}_\omega \rightarrow \tilde{c}_{\omega'}$ следующим образом. Положим $h_{\tilde{c}}(f(y_{2k})) = f'(y'_{2k})$, где $k = \overline{1, n_\omega \setminus 2}$.

Произвольной точке $\xi \in \tilde{c}_\omega$ поставим в соответствие $\xi' \in \tilde{c}_{\omega'}$, где $\xi' = f'h_{\tilde{c}}f^{-1}(\xi)$. Часть сепаратрисы $\tau_{\omega'}^{\nu_{2k}}$, находящуюся между точками y_{2k} и $f(y_{2k})$ обозначим через b_{2k} . Пусть $h_{\tau_{2k}} : b_{2k} \rightarrow b'_{2k}$ произвольный гомеоморфизм, удовлетворяющий следующим условиям: 1. $h_{\tau_{2k}}(y_{2k}) = h_c(y_{2k})$; 2. $h_{\tau_{2k}}(f(y_{2k})) = h_{\tilde{c}}(f(y_{2k}))$.

Обозначим через a_{2k} дугу $(y_{2k}; y_{2k+2}) \subset c_\omega$ и через \tilde{a}_{2k} дугу $(f(y_{2k}); f(y_{2k+2})) \subset \tilde{c}_\omega$. Обозначим через O_{2k} область, граница которой представляется в виде $\partial O_{2k} = a_{2k} \cup \tilde{a}_{2k} \cup b_{2k} \cup b_{2k+2}$ (рис. 2.2). Пусть $h_{O_{2k}} : \partial O_{2k} \rightarrow \partial O'_{2k}$ гомеоморфизм, заданный следующим образом:

$$h_{O_{2k}}(x) = \begin{cases} h_c(x), & \text{если } x \in a_{2k}; \\ h_{\tilde{c}}(x), & \text{если } x \in \tilde{a}_{2k}; \\ h_{\tau_{2k}}(x), & \text{если } x \in b_{2k}; \\ h_{\tau_{2k+2}}(x), & \text{если } x \in b_{2k+2}, \end{cases}$$



Р и с у н о к 2.2

Тогда существует гомеоморфизм $H_{O_{2k}} : O_{2k} \rightarrow O'_{2k}$ такой, что $H_{O_{2k}}|_{\partial O_{2k}} = h_{O_{2k}}|_{\partial O_{2k}}$. Положим $K_\omega = \overline{B_\omega \setminus f(B_\omega)}$ ($K_{\omega'} = \overline{B_{\omega'} \setminus f'(B_{\omega'})}$). По построению $K_\omega = \bigcup_{k=1}^{n_\omega \setminus 2} O_{2k}$ и обозначим через

$$H_{c_\omega} : K_\omega \rightarrow K_{\omega'}$$

гомеоморфизм, совпадающий с $H_{O_{2k}}$ на множестве O_{2k} .

Зададим гомеоморфизм $h_\omega : B_\omega \rightarrow B_{\omega'}$, полагая, $h_\omega(x) = f'^k(H_{c_\omega}(f^{-k}(x)))$ для любой точки $x \in B_\omega$, где $f^{-k}(x) \in K_\omega$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда гомеоморфизм $\tilde{h} : M_2 \rightarrow M'_2$, составленный из гомеоморфизмов h_ω для всех $\omega \in \Omega_0$, является искомым.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Для доказательства достаточности нам понадобится понятие схемы диффеоморфизма, введенное в [2].

Положим $V_f = W_{\Omega_0}^s \setminus \Omega_0$ - пространство орбит диффеоморфизма f , названное в [2] характеристическим многообразием и $\hat{V}_f = V_f/f$ - характеристическим пространством орбит для диффеоморфизма f . В силу [2] (предложение 2.1.5, теорема 2.1.3) многообразие \hat{V}_f гомеоморфно двумерному тору \mathbb{T}^2 . Обозначим через $p_{\hat{V}_f} : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ естественную проекцию, являющуюся накрытием, индуцирующим отображение $\zeta_f : \pi^{-1}(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$, которое состоит из нетривиальных гомоморфизмов в группу \mathbb{Z} на фундаментальной группе каждого тора из множества \hat{V}_f .

Для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_1$ положим. $\hat{W}_\sigma^u = p_f(W_\sigma^u \setminus \sigma)$ и $\mathbb{W}_f^u = \bigcup_{\sigma \in L_{\Omega_1}} W_\sigma^u$.

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \mathbb{W}_f^u, \zeta_f)$ назовем схемой диффеоморфизма f .

О п р е д е л е н и е 2.1. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$, такой что:

1. $\zeta_f([c]) = \zeta_{f'}([\hat{\varphi}(c)])$ для любой замкнутой кривой $c \subset \hat{V}_f$;
2. для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_1$ существует $\sigma' \in \Omega'_1$, такая что $\hat{\varphi}(\hat{W}_\sigma^u) = \hat{W}_{\sigma'}^u$.

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь схемы и трехцветного графа:

Л е м м а 2.2. Если диффеоморфизмы f, f' имеют изоморфные трехцветные графы $T_f, T_{f'}$, то их схемы $S_f, S_{f'}$ эквивалентны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 2.1. существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M^2 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_1} W_\sigma^s \rightarrow M^2 \setminus \bigcup_{\sigma' \in \Omega'_1} W_{\sigma'}^s$, сопрягающий ограничения диффеоморфизмов на этих множествах. Отображение $\hat{\varphi} = \pi \tilde{h} \pi'^{-1}$ является гомеоморфизмом, осуществляющим эквивалентность схем \hat{V}_f и $\hat{V}_{f'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

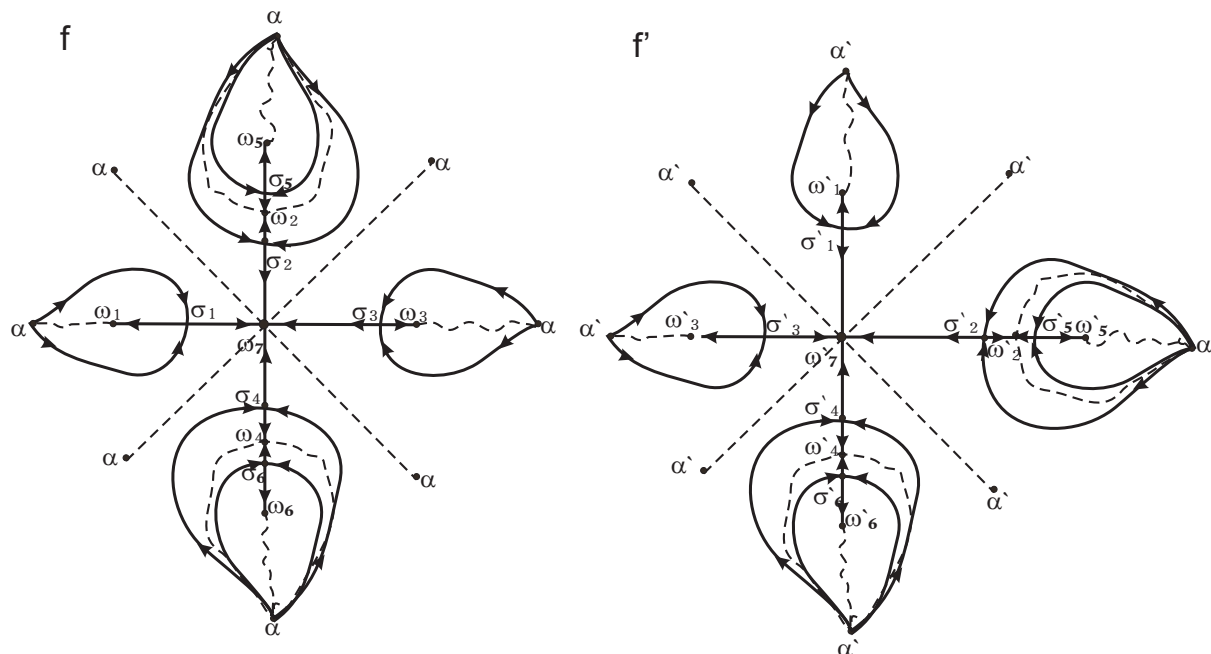
В силу леммы 3.2.3 книги [2] из изоморфности схем S_f и $S_{f'}$ следует гомеоморфизм диффеоморфизмов f и f' .

Таким образом, теорема 1.1. доказана.

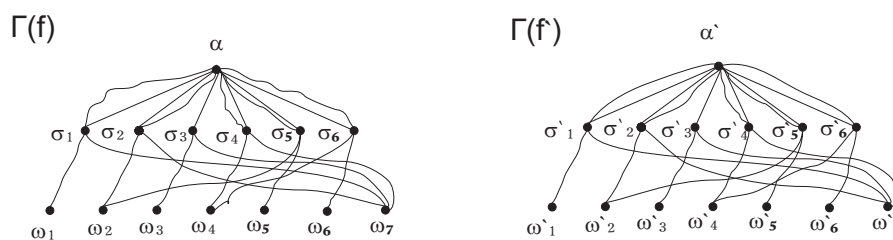
3. Некоторые примеры

Приведем пример построения трехцветного графа для градиентно-подобного диффеоморфизма на двумерном многообразии.

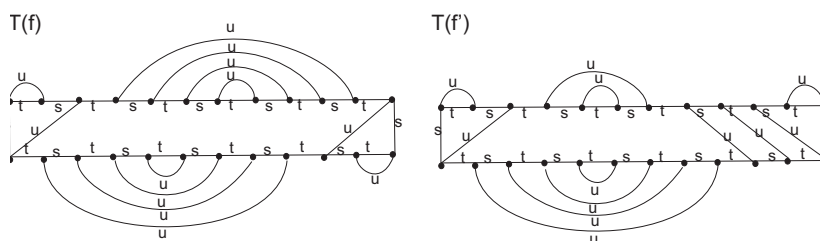
На рис. 3.1 представлены фазовые портреты несопряженных диффеоморфизмов Морса-Смейла на двумерной сфере (точкам, обозначенным буквой α для f (α' для f'), соответствует в точности одна источниковая точка диффеоморфизма двумерной сферы). Графы Пейкшото, построенные для этих диффеоморфизмов, являются изоморфными (рис. 3.2), а трехцветные графы - неизоморфными (рис. 3.3).



Р и с у н о к 3.1



Р и с у н о к 3.2



Р и с у н о к 3.3

Автор выражает благодарность В. З. Гринесу за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: межвуз. тематич. сб. науч. тр.*. Т. Ч. 2, ред. Е. А. Леонтович-Андропова, ГГУ, Горький, 1987, 24–32.

2. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
3. Леонтович Е., Майер А. О., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557–560.
4. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.
5. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

On topological classification of grad-like diffeomorphisms on surfaces by means of three-color graph.

© S. H. Kapkaeva⁴

Abstract. The paper is devoted to finding of necessary and sufficient conditions for topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms on surfaces whose non-wandering set consists of fixed points. It is shown that three-color graph (generalising the similar concept introduced in paper [4]) associated with given diffeomorphism is complete topological invariant of diffeomorphism from considered class.

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugate diffeomorphisms, three-color graph.

⁴Student, faculty of Mathematics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.