УДК УДК 517.938

Эквивалентность потоков Морса-Смейла с тремя неподвижными точками на 4-мерных многообразиях

© Е. В. Жужома[1], В. С. Медведев[2]

Аннотация. Статья посвящена вопросу топологической классификации потоков Морса-Смейла с тремя критическими точками на замкнутых 4-мерных многообразиях. Доказано, что если f_1^t, f_2^t – потоки Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек, на замкнутых четырехмерных многообразиях M_1^4, M_2^4 соответственно, то f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны.

Ключевые слова: топологическая классификация, потоки Морса-Смейла, 4-мерные многообразия

Пусть f^t - поток Морса-Смейла (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], [18]) на замкнутом n-мерном ($n \geq 3$) многообразии M^n. В [14] было доказано существование замкнутых n-многообразий (и исследование таких многообразий), допускающих функции Морса ровно с тремя критическими точками. В частности, было доказано, что размерность $n = \dim M^n$ многообразия может принимать только одно из следующих значений $n \in \{2, 4, 8, 16\}$. Из [14], [17] вытекает существование потоков Морса-Смейла ровно с тремя критическими точками на замкнутых многообразиях с указанными размерностями. Известно [14], что M^2 является проективной плоскостью. Потоки Морса-Смейла с тремя критическими точками на проективной плоскости топологически эквивалентны. Настоящая статья посвящена вопросу топологической классификации потоков Морса-Смейла с тремя критическими точками на замкнутых 4-мерных многообразиях. Основной результат содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть f_1^t, f_2^t – потоки Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек, на замкнутых четырехмерных многообразиях M_1^4, M_2^4 соответственно. Тогда f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны.*

Сперва рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, векторное поле $\vec{V}_s$, которое задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1, \ \ldots, \ \dot{x}_k = -x_k, \quad \dot{x}_{k+1} = x_{k+1}, \ \ldots, \ \dot{x}_n = x_n. \tag{1.1}$$

Ясно, что начало координат $O = (0, \ldots, 0)$ является седлом поля $\vec{V}_s$ с k-мерной устойчивой сепаратрисой $W^s(O)$ и $(n-k)$-мерной неустойчивой сепаратрисой $W^u(O)$, где $W^s(O) = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$, $W^u(O) = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_{k+1} = 0, \ldots, x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^n$. В [7] было показано, что функция $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \sum_{j=k+1}^n x_j^2$ является интегралом системы (1.1).

Из вида F следует, что для любого $c > 0$ гиперповерхность $F = c$ является $(n-1)$-мерным многообразием, которое мы обозначим через H_c^{n-1}. Это многообразие разбивает $\mathbb{R}^n$ на два открытых множества

$$\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, F(\vec{x}) < c\} \stackrel{\text{def}}{=} U_0, \quad \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, F(\vec{x}) > c\} \stackrel{\text{def}}{=} U_\infty.$$

[1] профессор, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

Объединение $W^s(O) \cup W^u(O)$ является интегральной гиперповерхностью, определяемой равенством $F = 0$. Поскольку $O \in W^s(O) \cup W^u(O)$, то $O \in U_0$. Таким образом, U_0 - инвариантная окрестность седла O, которую мы будем называть *специальной.*

Рассмотрим $(n-1)$-мерное многообразие $C^{n-1}_{1,k}(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = r^2\}$, $r > 0$. Пересечение $C^{n-1}_{1,k}(r) \cap H^{n-1}_c$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют равенствам $x_1^2 + \dots + x_k^2 = r^2$, $r^2(x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2) = c$. Поэтому $C^{n-1}_{1,k}(r) \cap H^{n-1}_c$ естественным образом гомеоморфно прямому произведению сфер $S^{k-1}_{1,k} \times S^{n-k-1}_{k+1,n}$, где

$$S^{k-1}_{1,k} = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^k_{1,k},$$

$$S^{n-k-1}_{k+1,n} = \{(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 = \frac{c}{r^2}\} \subset \mathbb{R}^{n-k}_{k+1,n}.$$

Согласно [7], каждая траектория векторного поля $\vec{V}_s$, принадлежащая H^{n-1}_c, пересекает $C^{n-1}_{1,k}(r) \cap H^{n-1}_c$ ровно один раз, причем квази-трансверсально[3]. Поэтому H^{n-1}_c диффеоморфно $S^{k-1}_{1,k} \times S^{n-k-1}_{k+1,n} \times \mathbb{R}$.

Обозначим через $clos\ N$ топологическое замыкание множества N.

Лемма 1.1. *Пересечение* $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{1,k}$ *гомеоморфно прямому произведению*

$$S^{k-1}_{1,k} \times D^{n-k}_{k+1,n}, \quad \text{где } D^{n-k}_{k+1,n} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2 \le \frac{c}{r^2}\}$$

диффеоморфно $(n-k)$*-мерному замкнутому шару. Более того,* $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{1,k}$ *разбивает* $clos\ U_0$ *на две компоненты, и векторное поле* $\vec{V}_s$ *на множестве* $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{1,k}$ *направлено внутрь компоненты, в которой лежит седло* O*.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из уравнений, задающих $C^{n-1}_{1,k}$ и H^{n-1}_c. Для доказательства второй части утверждения заметим, что $C^{n-1}_{1,k}$ разбивает $\mathbb{R}^n$ на две компоненты, причем, в силу (1.1), векторное поле $\vec{V}_s$ на $C^{n-1}_{1,k}$ направлено внутрь компоненты, в которой лежит седло O. Отсюда вытекает требуемое утверждение. $\square$

Аналогично многообразию $C^{n-1}_{1,k}(r)$ рассмотрим $(n-1)$-мерное многообразие

$$C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{j=k+1}^{n} x_i^2 = \frac{ec}{r^2}\}.$$

Пересечение $C^{n-1}_{k+1,k}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) \cap H^{n-1}_c$ есть множество точек, координаты которых удовлетворяют равенствам $x_1^2 + \dots + x_k^2 = \frac{r^2}{e}$, $r^2(x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2) = \frac{ec}{r^2}$. Поэтому $C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) \cap H^{n-1}_c$ естественным образом гомеоморфно прямому произведению сфер $S^{k-1}_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \times S^{n-k-1}_{k+1,n}(\frac{\sqrt{ec}}{r})$, где

$$S^{k-1}_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \mid \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \frac{r^2}{e}\} \subset \mathbb{R}^k_{1,k},$$

$$S^{n-k-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) = \{(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \mid \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 = \frac{ec}{r^2}\} \subset \mathbb{R}^{n-k}_{k+1,n}.$$

[3] Это означает, что касательные пространства соответствующих объектов пересекаются только в нуле.

Обозначим через f_τ сдвиг вдоль траекторий векторного поля $\vec{V}_s$ на время τ. Поскольку $f_1(C^{n-1}_{1,k}(r) \cap H^{n-1}_c) = f_1(S^{k-1}_{1,k} \times S^{n-k-1}_{k+1,n})$, то из (1.1) следует, что

$$f_1(C^{n-1}_{1,k}(r) \cap H^{n-1}_c) = S^{k-1}_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \times S^{n-k-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) = C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right) \cap H^{n-1}_c. \qquad (1.2)$$

Обозначим через $H^{n-1}_c(0 \le \tau \le 1)$ объединение отрезков траекторий поля $\vec{V}_s$, начинающихся на $S^{k-1}_{1,k} \times S^{n-k-1}_{k+1,n}$ и оканчивающихся на $S^{k-1}_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \times S^{n-k-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right)$. Другими словами,

$$H^{n-1}_c(0 \le \tau \le 1) = \bigcup_{0 \le \tau \le 1} f_\tau(S^{k-1}_{1,k} \times S^{n-k-1}_{k+1,n}).$$

Согласно (1.2), $H^{n-1}_c(0 \le \tau \le 1)$ есть часть $(n-1)$-мерного многообразия H^{n-1}_c, состоящая из единичных по времени отрезков траекторий векторного поля $\vec{V}_s$.

Аналогично доказывается следующее утверждение. Пересечение $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right)$ гомеоморфно прямому произведению

$$D^k_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \times S^{n-k-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right), \text{ где } D^k_{1,k}\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) = \{(x_1, \dots, x_n) \,|\, x_1^2 + \dots + x_k^2 \le \frac{r^2}{e}\}$$

диффеоморфно k-мерному замкнутому шару. Более того, $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right)$ разбивает $clos\ U_0$ на две компоненты, и векторное поле $\vec{V}_s$ на $(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right)$ направлено наружу компоненты, в которой лежит седло O. Как следствие получаем результат, который мы для ссылок сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 1.2. *$(n-1)$-мерные подмногообразия*

$$(clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{1,k}(r), \quad H^{n-1}_c(0 \le \tau \le 1), \quad (clos\ U_0) \cap C^{n-1}_{k+1,n}\left(\frac{\sqrt{ec}}{r}\right)$$

ограничивают открытую область $W_0 \subset U_0$, содержащую седло O.

Доказательство теоремы основано на следующих двух леммах (определения дикого вложения и заузленности см. в монографиях [8], [13]).

Л е м м а 1.3. *Пусть M^4_* - компактное 4-мерное многообразие, граница которого состоит из двух 3-мерных сфер S^3_1, S^3_2, $\partial M^4_* = S^3_1 \cup S^3_2$. Предположим, что на M^4_* задано векторное поле $\vec{V}$ со следующими свойствами: 1) $\vec{V}$ имеет ровно одно состояние равновесие s_*, которое является гиперболическим седлом типа $(2,2)$; 2) $\vec{V}$ трансверсально границе ∂M^4_* и направлено внутрь M^4_* на S^3_1 и наружу M^4_* на S^3_2; 3) каждая траектория поля $\vec{V}$, не принадлежащая сепаратрисам $W^s(s_*)$, $W^u(s_*)$ седла s_*, пересекает обе сферы S^3_1, S^3_2; 4) устойчивая сепаратриса $W^s(s_*)$ и неустойчивая сепаратриса $W^u(s_*)$ седла s пересекают соответственно сферы S^3_1 и S^3_2 вдоль замкнутых кривых $W^s(s_*) \cap S^3_1$ и $W^u(s_*) \cap S^3_2$. Тогда каждая кривая $W^s(s_*) \cap S^3_1$ и $W^u(s_*) \cap S^3_2$ не заузлена соответственно в S^3_1 и S^3_2.*

Доказательство. Обозначим кривые $W^s(s_*) \cap S^3_1$ и $W^u(s_*) \cap S^3_2$ через C_1 и C_2 соответственно. Эти кривые на сепаратрисах $W^s(s_*)$, $W^u(s_*)$ ограничивают замкнутые двумерные диски D_1, D_2 соответственно. Так как сферы S^3_1, S^3_2 трансверсальны векторному полю, то седло s лежит внутри каждого диска D_1, D_2. Из того, что в потоках Морса-Смейла отсутствуют петли сепаратрис следует, что D_1, D_2 пересекаются ровно в одной точке $s_* = D_1 \cap D_2$.

Предположим противное, и рассмотрим для определенности случай, когда кривая C_1 образует нетривиальный узел в S^3_1 (случай, когда C_2 образует нетривиальный узел в S^3_2 рассматривается аналогично). Согласно расширенной версии теоремы Гробмана-Хартмана, существует окрестность U множества $D_1 \cup D_2$, в которой поток топологически эквивалентен линейному потоку, определяемому линейной частью векторного поля $\vec{V}$ в точке s_*. В силу предложения 2.15 [9], линейные гиперболические векторные поля топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип состояния равновесия. Поэтому поле $\vec{V}$ в U топологически сопряжено векторному полю $\vec{V}_s$, которое определяется системой дифференциальных уравнений (1.1) при $n = k = 2$. В частности, U гомеоморфна достаточно большой части специальной окрестности U_0, содержащей седло O. Не уменьшая общности, можно считать, что U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$ (в обозначениях леммы 1.2.).

По условию леммы (свойство 3), все положительные траектории, начинающиеся в $S^3_1 - C_1$, достигают $S^3_2 - C_2$ при неограниченном увеличении времени, и обратно, все отрицательные траектории, начинающиеся в $S^3_2 - C_2$, достигают $S^3_1 - C_1$ при неограниченном уменьшении времени. Обозначим через $\xi : S^3_1 - C_1 \to S^3_2 - C_2$ отображение Пуанкаре, индуцируемое полем $\vec{V}$. Из классических теорем теории дифференциальных уравнений следует, что ξ - диффеоморфизм. Таким образом, C_1 и C_2 - два узла с гомеоморфными дополнениями. В силу [15], нетривиальность узла C_1 влечет нетривиальность узла C_2.

Рассмотрим полноторий $P_1 \subset U \cap S^3_1$, являющийся трубчатой окрестностью кривой C_1 в S^3_1. Поскольку C_1 - гладкая кривая, то такая окрестность существует. Из эквивалентности поля $\vec{V}$ в окрестности U с полем $\vec{V}_s$ вытекает, что $\xi(P_1 - C_1)$ совместно с C_2 образуют трубчатую окрестность (обозначим ее через P_2) кривой C_2. Уменьшив, если необходимо, полнотории P_1 и P_2, можно считать, что P_1, P_2 принадлежат границе окрестности U. Поскольку U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$, то границы полноторий P_1, P_2 соединены отрезками траекторий векторного поля $\vec{V}$, причем ограничение $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$ переводит меридиан полнотория P_1 в параллель полнотория P_2, а параллель P_1 - в меридиан P_2.

Покажем, что сфера S^3_2 гомеоморфна многообразию, которое получается после перестройки сферы S^3_1 вдоль узла C_1. Действительно, удалим из S^3_1 полноторий P_1 и вклеим вместо него полноторий P_2 с помощью гомеоморфизма $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$. Поскольку приклеивающий гомеоморфизм $\xi|\partial P_1$ является продолжением гомеоморфизма $\xi|S^3_1 \setminus P_1 : S^3_1 \setminus P_1 \to S^3_2 \setminus P_2$, то отображение $\xi_* : (S^3_1 \setminus P_1) \cup_\xi P_2 \to S^3_2$, которое совпадает с ξ на $S^3_1 \setminus P_1$ и суть тождественное на P_2, является корректно определенным гомеоморфизмом.

Таким образом, сфера S^3_2 получается в результате перестройки сферы S^3_1 вдоль узла C_1 с помощью нетривиального гомеоморфизма $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$. Так как C_1 - нетривиальный узел, то в результате такой перестройки всегда получается многообразие, отличное от 3-сферы [15] (см. также [16]). Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Напомним, что в 1977 году Пикстон построил простейший градиентноподобный диффеоморфизм Морса-Смейла на трехмерной сфере с неблуждающим множеством, состоящем из четырех неподвижных точек. Основная особенность примера состояла в наличии седла, у которого топологическое замыкание двумерной сепаратрисы образовывало дико вложенную двумерную сферу (отметим, что из [11] вытекает, что на 3-многообразиях не существует диффеоморфизмов Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек). Аналогичные примеры были построены в [2] - [5], [6], [10], [12], где рассматривались также вопросы классификации. Простейших градиентных потоков Морса-Смейла на трехмерных замкнутых многообразиях с подобными сепаратрисами не существует.

Лемма 1.4. *Пусть на замкнутом многообразии M^n, $n \geq 4$, задан поток Морса-Смейла f^t без периодических траекторий и ровно с тремя состояниями равновесия (два узла и седло). Тогда топологические замыкания неустойчивого и устойчивого многообразий седла являются локально плоскими вложенными $\frac{n}{2}$-сферами.*

Доказательство. Обозначим через α, ω и σ источник, сток и седло потока f^t соответственно. Так как потоки Морса-Смейла не имеют сепаратрисных петель, то неустойчивое $W^u(\sigma)$ и устойчивое $W^s(\sigma)$ многообразия седла σ пересекаются только в одной точке σ. Поскольку других седел, кроме σ, нет, то $W^u(\sigma)$ и $W^s(\sigma)$ не имеют гетероклинических пересечений.

Известно, что если инвариантное многообразие седла не имеет гетероклинических пересечений, то его топологическое замыкание содержит ровно один узел и гомеоморфно сфере, размерность которой равна размерности инвариантного многообразия. Поэтому оба топологических замыкания $clos\ W^u(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} S_\omega$, $clos\ W^s(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} S_\alpha$ суть топологически вложенные 2-сферы. Докажем, что S_ω является ручно вложенной сферой. Так как инвариантные многообразия седел являются гладко вложенными подмногообразиями, то единственной точкой дикого вложения сферы S_ω может быть только точка ω. Так как ω - гиперболический узел, то существует гладко вложенная 3-сфера S, окружающая $B \subset M^4$ с точкой ω и трансверсальная потоку. Поэтому $W^u(\sigma)$ пересекает S по замкнутой простой кривой, скажем C. Из леммы 1.3. вытекает, что C не заузлена в S. Обозначим через K пересечение S_ω с B. Поскольку S трансверсальна потоку, то K гомеоморфно топологической надстройке над C. Из незаузленности C следует, что K есть локально плоский во всех точках диск.

Доказательство того, что S_α локально плоская (во всех точках) аналогичное. $\Box$

Пусть теперь f_1^t, f_2^t – потоки Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек, на замкнутых четырехмерных многообразиях M_1^4, M_2^4 соответственно. Окружим узлы этих потоков 3-мерными сферами, которые ограничивают в M_1^4, M_2^4 4-мерные шары B_α^1, B_ω^1 и B_α^2, B_ω^2 соответственно. Существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $h_\alpha : B_\alpha^1 \to B_\alpha^2$, $h_\omega : B_\omega^1 \to B_\omega^2$ переводящие интегральные кривые потока f_1^t в интегральные кривые потока f_2^t. Из лемм 1.3., 1.4. вытекает, что гомеоморфизмы h_α и h_ω можно продолжить до гомеоморфизма $M_1^4 \setminus (B_\alpha^1 \cup B_\omega^1) \to M_2^4 \setminus (B_\alpha^2 \cup B_\omega^2)$, переводящего траектории потока f_1^t в траектории потока f_2^t. Следовательно, f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны.

Благодарности. Авторы благодарят участников семинара В.З. Гринеса за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках грантов РФФИ № 11-01-12056 офи-м, 12-01-00672-а.

Список литературы

1. Аносов Д. В., “Исходные понятия”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова)*, 1985, 156–178.

2. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е., “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях.”, *Доклады РАН*, **377** (2001), 151–155.

3. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях.”, *Труды МИАН*, **236** (2002), 66–78.

4. Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В., “Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях.”, *Труды МИАН*, **250** (2005), 5–53.

5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях.”, *Матем. Заметки*, **74** (2003), 369–386.

6. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В., “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла.”, *Труды МИАН*, **271** (2010), 1–23.

7. Жужома Е.В., Медведев В.С., “Градиентные потоки с дико вложенными замыканиями сепаратрис.”, *Труды МИАН*, **270** (2010), 138–146.

8. Келдыш Л.В., *Топологические вложения в евклидово пространство*, Наука, М, 1966.

9. Палис Ж., Ди Мелу В., *Геометрическая Теория Динамических Систем. Введение*, Мир, М, 1986.

10. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3, *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579–602.

11. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves.”, *Topology and Appl.*, **117** (2002), 335–344.

12. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds.”, *Topology*, **43** (2004), 369–391.

13. Daverman R.J., Venema G.A., *Embeddings in Manifolds*, **106**, GSM, Amer. Math. Soc., Providence, 2009.

14. Eells J., Kuiper N., “Manifolds which are like projective planes.”, *Publ. Math. IHES*, **14** (1962), 5–46.

15. Gordon C. McA., Luecke J., “Knots are determinned by their complements.”, *J. Amer. Math. Soc.*, **2** (1989), 371–415.

16. Kronheimer P., Mrowka T., “Witten’s conjecture and property P.”, *Geometry and Topology*, **8** (2004), 295–310.

17. Smale S., “Morse inequalities for a dynamical system.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

18. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817 [Руский перевод: Успехи мат. наук. – 1970. Т. 25. – С. 113–185].

Equivalence of Morse-Smale flows on 4-manifolds

© **E.V. Zhuzhoma**[4], **V.S. Medvedev**[5]

Abstract. The paper concerns to the question of a topological classification of Morse-Smale flows with three critical points on closed 4-manifolds. One proves that if f_1^t, f_2^t are Morse-Smale flows with the non-wandering set consisting of three points on closed 4-manifolds M_1^4, M_2^4 respectively, then f_1^t, f_2^t are topologically equivalent.

Key Words: Topological classification, Morse-Smale flows, 4-manifolds

[4] Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[5] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.