УДК 517.9

Вычислительные аспекты оценки управляющих параметров модели системной динамики

© С. И. Спивак[1], И. Р. Салахов[2], О. Г. Кантор[3]

Аннотация. Разработанный программный комплекс методов математического моделирования и численных алгоритмов, позволяет, проведя серию численных экспериментов, определить параметры уравнений системной динамики, добиваясь необходимого значения управляемого параметра.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, метод Рунге-Кутты, метод Симпсона, модели системной динамики, оценка параметров модели.

Математическое моделирование экономических процессов и последовательное установление логических связей для обеспечения возможности наблюдения, контроля и управления ими, является наиболее эффективным средством для решения различных проблем. Существующие математические методы и модели могут позволить решать задачи большей размерности и учитывать широкий перечень показателей и факторов влияния, а время решения задач значительно сокращается с применением компьютеров. Среди них задачи оптимизации, прогнозирования, задачи принятия решения и другие.

Математическая модель реального объекта, процесса или системы представляется в виде системы функционалов. Ее построение заключается в определении связей между теми или иными процессами и явлениями, создании математического аппарата, позволяющего выразить количественно и качественно связь между теми или иными процессами и явлениями, между интересующими специалиста физическими величинами, и факторами, влияющими на конечный результат. Такая связь зачастую выражается системами дифференциальных уравнений, параметры которых делятся на неуправляемые и управляющие. Исследователей же интересовала проблема обеспечения некоего значения неуправляемого параметра за счет вариации управляющих. Результаты решения поставленной задачи должны показать, корректны ли значения управляющих параметров, согласно их реальным объектам, необходимые для достижения требуемого значения неуправляемого параметра. Если они таковыми не являются, то перед исследователями стоит нереальная задача.

Одним из методов изучения сложных систем с нелинейными обратными связями является системная динамика, на основе которой была построена модель. Она разработан в середине XX века профессором Массачусетского технологического института Дж. Форрестером – одним из крупнейших специалистов в области теории управления [1]. В моделях системной динамики используются переменные двух типов: системные уровни и темпы. Системные уровни полностью описывают состояние системы в произвольный момент времени.

Цель настоящей работы – решение обратной задачи определения параметров управлений системной динамики.

Поставленная задача разрешалась на примере модели, которая была определена с помощью методов эконометрического и математического моделирования, описывающей изменение численности населения с учетом влияния определенных факторов.

[1] Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[2] Аспирант, Башкирский государственный университет, г. Уфа; salah-off@mail.ru.

[3] Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

Начальное приближение параметров модели осуществлялось путем перехода от дифференциальных уравнений системы к интегральным по формуле Симпсона, один из коэффициентов полагался неизвестным, после чего интегрируя обе части уравнения, правая часть заменялась приближенным выражением, рассчитанными по методу Симпсона. Из полученного соотношения определялся неизвестный параметр. Применив комплекс численных алгоритмов, модель была откорректирована с учетом достижения необходимой точности описания [2],[3].

$$\begin{gathered}\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 64,1 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \\ \frac{dD}{dt} = 560 \cdot D^{0,35} - 9900 \cdot I \\ \frac{dI}{dt} = 0,131 \cdot I^{-0,4} - 0,0072 \cdot S^{0,092}\end{gathered} \tag{1.1}$$

Где неизвестными параметрами модели являются:

- N - численность населения РФ, чел.;
- D - душевые доходы за год, руб./чел. в год;
- I - индекс потребительских цен, %.

При прогнозировании изменения численности населения, ставится следующая задача. Какими должны быть управляющие параметры D и I системы, чтобы обеспечить необходимую численность в будущем году, сохраняя адекватность описания исходных данных.

В соответствии с поставленной задачей были сформулированы следующие принципы оптимальности. Для нахождения оптимального решения необходимо провести ряд численных экспериментов и выявить из множества подходящих моделей, удовлетворяющие поставленным условиям.

$$\begin{gathered}|N(t) - N_{exp}(t)| \leq \delta_1; \\ |D(t) - D_{exp}(t)| \leq \delta_2; \\ |I(t) - I_{exp}(t)| \leq \delta_3,\end{gathered} \tag{1.2}$$

Все параметры системы укладываются в заданный коридор значений относительно экспериментальных данных.

$$\overline{A_N} \leq 10\%; \quad \overline{A_D} \leq 10\%; \quad \overline{A_I} \leq 10\%; \tag{1.3}$$

По всем трем уравнениям средняя ошибка аппроксимации не превышает 10%.

$$|N(t) - N_{exp}(t + \Delta)| \leq \varepsilon N(t), \tag{1.4}$$

Обеспечивается необходимое изменение прогнозного значения численности населения N и составляет $\varepsilon = 0.001$ от фактического значения в последний период времени.

Для организации вычислительного эксперимента был реализован в среде Delphi программный комплекс методов математического моделирования и численных алгоритмов, в состав которого входят:

1. Решение прямой задачи численным интегрированием системы дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

2. Выбор начальных приближений параметров модели путем перехода от дифференциальных уравнений системы к интегральным по формуле Симпсона.

3. Определение диапазонов вариации коэффициентов уравнений, при которых выполняются условия адекватного описания.

4. Поиск параметров модели путем анализа критериев оптимальности.

Для оптимизации планируемого эксперимента необходимо выявить диапазоны вариации коэффициентов уравнений, при которых выполняются условия адекватного описания. Перебрав пары линейных коэффициентов каждого уравнения, зафиксировав при этом остальные, получена область значений, при которых модель остается приемлемой.

Получено, что коэффициенты первого уравнения изменяются в диапазонах [5; 9] и [58; 62,5], второго уравнения [325; 820] и [0; 19200]. Вариация всех диапазонов каждого коэффициента займет большое количество времени, поэтому затраты значительно сократятся, если двигаться внутри области, разбив ее по блокам, при этом показатели степеней остаются постоянными.

Был организован численный алгоритм поиска максимального и минимального значения управляющих параметров D и I (схема 1), при которых выполняются поставленные условия.

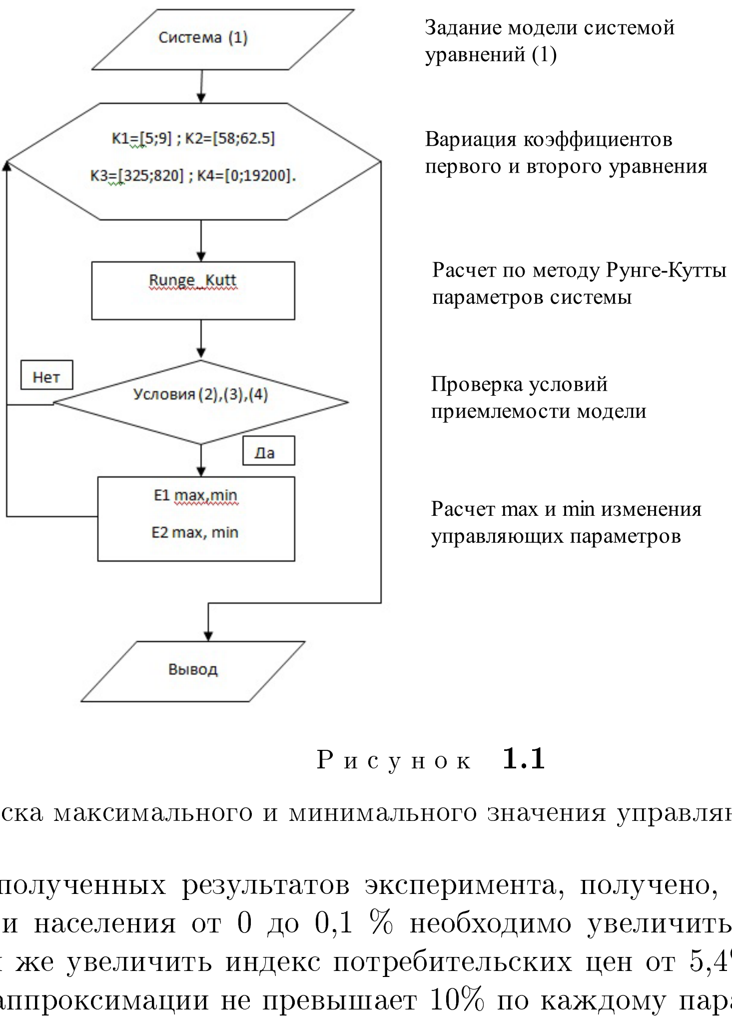

Рисунок **1.1**

Алгоритм поиска максимального и минимального значения управляющих параметров.

При анализе полученных результатов эксперимента, получено, что для обеспечения роста численности населения от 0 до 0,1 % необходимо увеличить душевые доходы от 1,4% до 27%, или же увеличить индекс потребительских цен от 5,4% до 7.3%. При этом средняя ошибка аппроксимации не превышает 10% по каждому параметру системы.

Список литературы

1. Махов С. А., "Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера", *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, **6** (2005), 24.

2. Спивак С. И., Кантор О. Г., Салахов И. Р., "Оценка параметров моделей системной динамики", *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:3 (2011).

3. Спивак С. И., Кантор О. Г., Салахов И. Р., "Моделирование численности населения Российской Федерации методом системной динамики", *Статистика. Моделирование. Оптимизация.*, 2011, 339.

Calculating aspects of estimates of control parameters system dynamics models

© **S. I. Spivak[4], I. R. Salakhov[5], O. G. Kantor[6]**

Abstract. In this paper we propose an approach to constructing models of system dynamics, based on the use of econometric modeling methods, approximate and numerical methods of integration, and series of numerical experiments which would allow the researcher to carry out a phased process of adjusting the model in terms of an adequate description of experimental data.

Key Words: differential equations, Runge-Kutta method, Simpson's rule, system dynamics models, estimation of model parameters.

[4] Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.
[5] Postgraduate, Bashkir State University, Ufa; salah-off@mail.ru.
[6] Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.