УДК 517.929

К вопросу об использовании систем дифференциальных уравнений с запаздыванием в прогнозировании динамики социально-экономических процессов

© **В. А. Атряхин**[1], **П. А. Шаманаев**[2]

Аннотация. В работе описываются три подхода к решению систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Предлагаются примеры использования предлагаемых механизмов для прогнозирования динамики воспроизводства научных кадров. Приводятся результаты построения прогноза.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, метод наименьших квадратов, задача Коши

1. Введение

В статье рассматривается математическая модель, описывающая процесс воспроизводства научных кадров на этапе поступления в аспирантуру с использованием системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В работе [1] предложен механизм отыскания неизвестных параметров настоящей математической модели на основе известных статистических данных за промежуток времени, предшествующий прогнозируемому.

В качестве математической модели рассмотрим систему дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = aw(t) + by(t-\delta) + cz(t-\delta), \\ \dot{z}(t) = kw(t) + dy(t-\delta) + sz(t-\delta), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t). \end{cases} \tag{1.1}$$

где $w(t)$ – численность претендентов на поступление в аспирантуру для фиксированного потока студентов в момент времени t; $y(t)$ – численность потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру по результатам выбранной сессии в момент времени t; $z(t)$ – численность потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру по результатам выбранной сессии в момент времени t; – промежуток времени, разделяющий моменты поступления в вуз соседних потоков, в нашем случае равный одному году.

В работе [1] система (1.1) свелась к системе конечно-разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_m^l = \frac{1}{2}\hat{a}(y_m^l + y_{m-1}^l) + \hat{b}y_m^{l-1} + \hat{c}z_m^{l-1}, \\ z_m^l = \frac{1}{2}\hat{k}(y_m^l + y_{m-1}^l) + \hat{d}y_m^{l-1} + \hat{s}z_m^{l-1}, \\ w_m^l = w_{m-1}^l + y_m^l - z_m^l. \end{cases} \tag{1.2}$$

где y_m^l – количество студентов l–го потока, присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру после m–ой сессии, z_m^l – количество студентов l–ого потока,

[1] Ассистент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

[2] Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру после m–ой сессии, w_m^l – численность группы претендентов на поступление в аспирантуру l–ого потока студентов после m–ой сессии.

2. Описание алгоритмов решения системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим алгоритм проведения вычислений по полученной разностной схеме с учетом известных статистических данных по N потокам. Предполагается, что известна статистическая информация в разрезе девяти сессий по N потокам, предшествующим прогнозируемому $N+1$–ому потоку: $y_m^l, z_m^l, w_m^l, l=\overline{1,N}, m=\overline{2,9}$ – и данные о результатах первой сессии $N+1$ – го потока – w_{N+1}^1. Цель вычислений – найти количество студентов $N+1$–го потока, которые будут в группе претендентов на поступление в аспирантуру после девятой сессии, – w_{N+1}^9. Численный алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой l–ой сессии вычисляются неизвестные параметры системы (1.2). Обозначим их $\hat{a}^l, \hat{b}^l, \hat{c}^l, \hat{k}^l, \hat{d}^l, \hat{s}^l, l=\overline{2,9}$.

На втором этапе численного алгоритма, используя найденные коэффициенты находятся прогнозируемые численности группы претендентов на поступление в аспирантуру $w_{N+1}^l, l=\overline{2,9}$.

Рассмотрим три варианта отыскания значений $w_{N+1}^l, l=\overline{2,9}$. Первый вариант сводится к использованию для нахождения значений $w_{N+1}^l, l=\overline{2,9}$ итерационной формулы.

Подставляя в третье уравнение системы (2) вместо y_m^l правую часть первого уравнения и вместо z_m^l правую часть второго уравнения, и выражая w_{N+1}^l, получаем итерационную формулу:

$$w_{N+1}^l = \frac{(1+\hat{a}^l/2-\hat{k}^l/2)w_{N+1}^{l-1}+(\hat{b}^l-\hat{d}^l)y_m^l+(\hat{c}^l-\hat{s}^l)z_N^l}{1+\hat{k}^l/2-\hat{a}^l/2} \tag{2.1}$$

Второй вариант отыскания значений $w_{N+1}^l, l=\overline{2,9}$ заключается в использовании аналитического решение системы (1.1) с известными коэффициентами. Введем обозначение

$$X_k(t) = \begin{pmatrix} y_k(t) \\ z_k(t) \\ w_k(t) \end{pmatrix}, l=\overline{2,9}.$$

Для нахождения решения воспользуемся теоремой [3]:

Т е о р е м а 2.1. *Пусть λ_k — корень уравнения $\Delta A(\lambda)=0$. Тогда комплексному числу λ_k отвечает решение системы (1.1) вида*

$$X_k(t) = P_k(t)e^{\lambda_k t},$$

где $P_k(t)$ — *полином относительно t с векторными коэффициентами и степени ниже кратности корня λ_k.*

Здесь $\Delta A(\lambda)=0$ – характеристическое уравнение. В развернутом виде характеристическое уравнение для системы (1.1) примет следующий вид:

$$det\left[\lambda E - \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & k \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ d & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-h\lambda}\right] = 0$$

Кратность корней $\lambda_k = 1$. А значит, решение системы (1.1) примет вид:

$$X_k(t) = \begin{pmatrix} d_1^l e^{\lambda_k t} \\ d_2^l e^{\lambda_k t} \\ d_3^l e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}, l = \overline{2,9}.$$

На первом этапе построения прогноза нам известно значение w_{N+1}^l. Для построения функции w_{N+1}^i, $i = \overline{2,9}$ воспользуемся итерационной формулой $w_{N+1}^{l-1} = d_3^l e^{(l-1)*\lambda_k}$, $l = \overline{2,9}$. В итоге на каждом отрезке $t \in [i-1, i]$, $i = \overline{2,9}$ будет построена экспоненциальная функция, причем значение функции в конечной точке отрезка будет начальной точной для функции, построенной на следующем отрезке. Значение w_{N+1}^9 будет итогом построения прогноза.

Графическое представление аналитического решения системы (1.1) схематически представлено на рисунке:

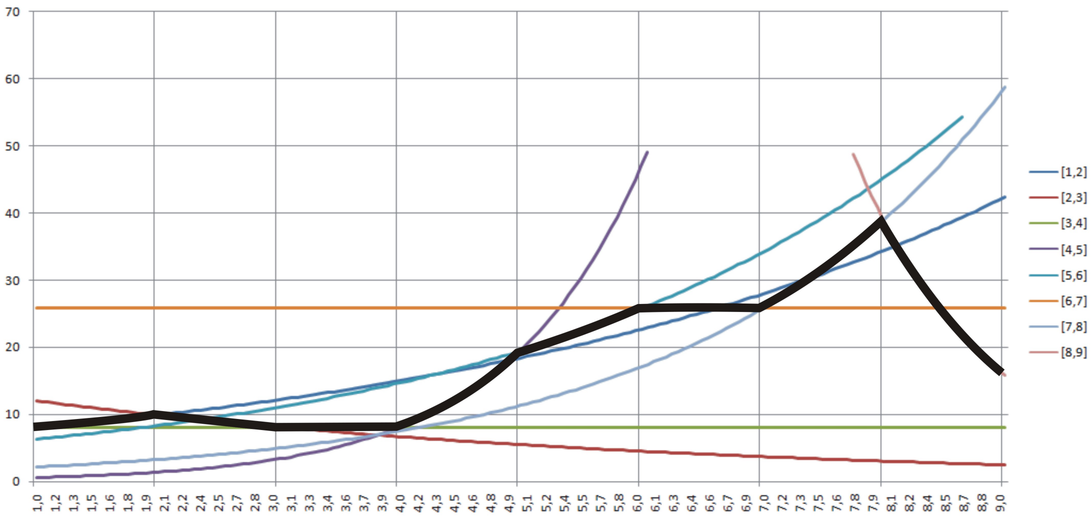

Рисунок **2.1**

Графическое представление аналитического решения системы (1.1), удовлетворяющего заданным начальным данным

Третьим вариантом отыскания значений $w_{N+1}^l, l = \overline{2,9}$ является численное решение системы (1.1). Для этого положим $\delta = 1$ и получим систему:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = aw(t) + by(t-1) + cz(t-1), \\ \dot{z}(t) = kw(t) + ly(t-1) + mz(t-1), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t). \end{cases} \tag{2.2}$$

Значения функций $w(t), y(t), z(t)$ являются известными при $t \in [0,1]$. Поэтому, решая систему (2.2) на отрезке $t \in [i, i+1]$, вместо $w(t-1), y(t-1), z(t-1)$ подставим значения функций $w(t), y(t), z(t)$ на отрезке $t \in [i-1, i]$. В итоге получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = aw(t) + q_1, \\ \dot{z}(t) = kw(t) + q_2, \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t). \end{cases} \tag{2.3}$$

Данная система решается методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

3. Численный эксперимент

Апробацию предложенной модели проведем на основе статистических данных об успеваемости одной группы студентов очной формы обучения специальности «Прикладная математика и информатика» математического факультета МГУ им. Н.П.Огарева, поступивших в университет с 2000 по 2006 год.

Примем за критерий включения в группу претендентов на поступление в аспирантуру величину среднего балла по итогам последней сессии большую или равную 4,2. Анализируя статистические данные, составим таблицу численности претендентов на поступление в аспирантуру (табл. 1), таблицу вливающихся в группу претендентов на поступление в аспирантуру (табл. 2) и таблицу выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру (табл. 3) в разрезе семи потоков студентов и сессий за 2000 – 2006 годы.

	Номер сессии								
Номер потока	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
2006	7	7	7	4	7	15	11	16	10
2005	8	13	8	4	14	19	16	19	11
2004	9	10	9	2	7	10	12	13	12
2003	12	9	10	4	11	11	13	15	11
2002	9	14	12	7	16	19	20	20	21
2001	6	6	8	6	8	18	21	21	19
2000	5	8	8	4	6	14	15	15	12

Таблица 1: Численность претендентов на поступление в аспирантуру

	Номер сессии								
Номер потока	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
2006	0	0	0	0	3	8	1	5	0
2005	0	5	0	0	10	5	0	4	0
2004	0	1	0	0	5	4	2	1	2
2003	0	1	2	0	7	3	4	3	3
2002	0	5	1	0	9	3	2	1	2
2001	0	1	3	2	4	11	4	2	4
2000	0	5	3	0	3	8	4	2	1

Таблица 2: Численность вливающихся в группу претендентов на поступление в аспирантуру

	Номер сессии								
Номер потока	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
2006	0	0	0	3	0	0	5	0	10
2005	0	0	5	4	0	0	3	1	8
2004	0	0	1	7	0	1	0	0	3
2003	0	4	1	6	0	3	2	1	7
2002	0	0	3	5	0	0	1	1	1
2001	0	1	1	4	2	1	1	2	6
2000	0	2	3	4	1	0	3	2	4

Таблица 3: Численность выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру

График, построенный на основании данных по численности группы претендентов на поступление в аспирантуру (рис. 3.1), подтверждает предположение о том, что изменение количественного состава групп претендентов по разным потокам в разрезе сессий сохраняет общие тенденции.

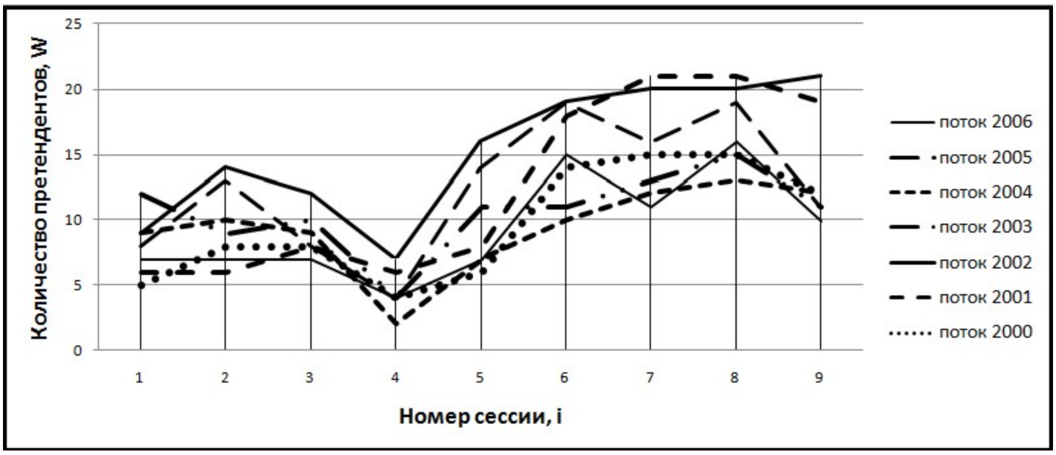

Рисунок **3.1**

Изменение численностей групп претендентов на поступление в аспирантуру для потоков 2000-2006 в разрезе сессий

На основании исходных статистических данных были получены следующие значения коэффициентов системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (1.1):

	Номер сессии							
Коэф.	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
a	0.453	-0.071	0.35	1.292	0.338	-0.007	0.206	0.18
b	-0.512	0.675	-0.988	-0.316	0.215	0.488	0.726	0.044
c	0.437	-0.28	0.339	2.655	0.481	-0.557	1.975	0.223
k	0.029	0.395	0.336	0.023	0.122	0.289	0.08	0.51
l	-0.207	-0.498	0.523	0.288	-0.059	0.314	0.297	0.205
m	-0.305	0.498	0.141	0.012	0.15	1.162	0.373	1.833

Таблица 4: Найденные значения коэффициентов для сессий со 2-ой по 9-ю

Итог построения прогноза по итерационной формуле (2.1) приведен в таблице 5 вместе с реальными статистическими данными за тот же промежуток времени.

	Номер сессии								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Прогноз	8	12	8	5	20	29	24	33	20
Стат. данные	8	6	14	4	8	20	20	22	18

Таблица 5: Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий по итерационной формуле (2.1)

Графически эти результаты представлены на рисунке:

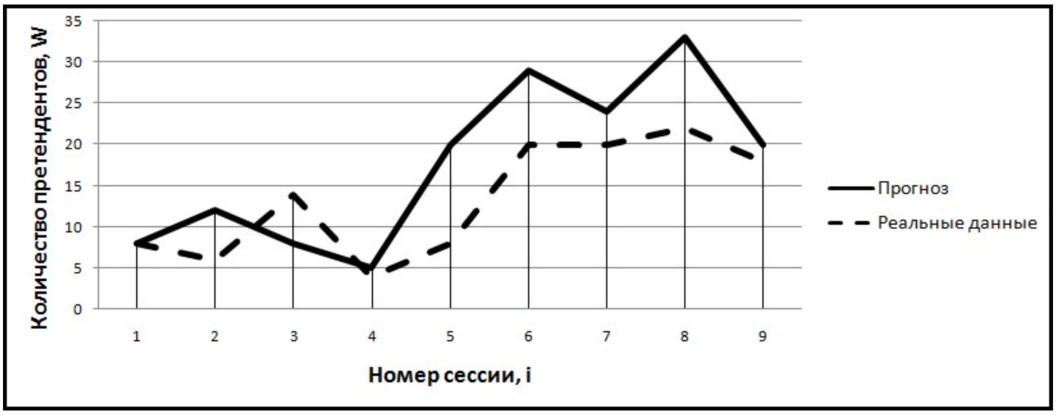

Рисунок **3.2**

Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий по итерационной формуле

Для приведенных коэффициентов были получены следующие аналитические решения систем:

	Номер сессии			
Решение	*2*	*3*	*4*	*5*
$y(t)$	$-6.07e^{-0.87t}$	$0.97e^{0.4t}$	$-5.29e^{-0.1t}$	$1.16e^{0.26t}$
$z(t)$	$10.34e^{-0.87t}$	$0.36e^{0.4t}$	$-4.6e^{-0.1t}$	$0.74e^{0.26t}$
$w(t)$	$18.99e^{-0.87t}$	$1.49e^{0.4t}$	$6.85e^{-0.1t}$	$1.63e^{0.26t}$

Таблица 6: Компоненты вектора $X(t)$ для сессий со 2-ой по 5-ю

	Номер сессии			
Решение	*6*	*7*	*8*	*9*
$y(t)$	$0.23e^{0.58t}$	$0.48e^{0.34t}$	$0.06e^{0.74t}$	$9898.3e^{-0.8t}$
$z(t)$	$0.4e^{0.58t}$	$0.01e^{0.34t}$	$-0.01e^{0.74t}$	$24642.48e^{-0.8t}$
$w(t)$	$0.33e^{0.58t}$	$1.39e^{0.34t}$	$0.08e^{0.74t}$	$18473.95e^{-0.8t}$

Таблица 7: Компоненты вектора $X(t)$ для сессий со 6-ой по 9-ю

Итог построения прогноза с использованием аналитического решения системы (1.1) приведен в таблице (табл. 8) вместе с реальными статистическими данными за тот же промежуток времени.

	Номер сессии								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Прогноз	8	3	5	5	6	11	15	30	15
Стат. данные	8	6	7	4	7	13	20	22	18

Таблица 8: Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий по аналитическому решению системы

Графически эти результаты представлены на рисунке:

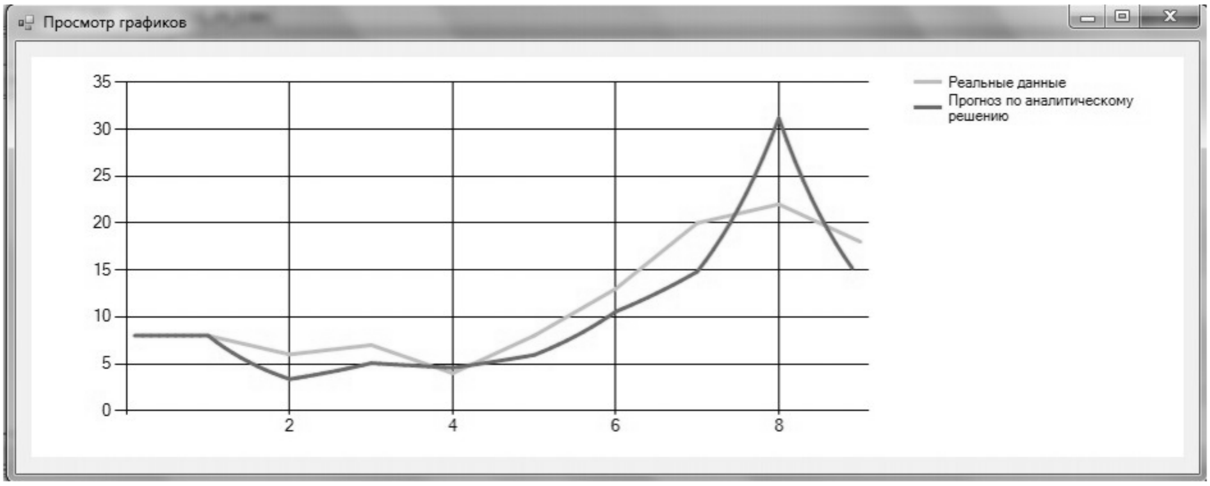

Рисунок **3.3**

Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий по аналитическому решению системы (1.1)

Итог построения прогноза с использованием численного решения системы (1.1) методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности приведен в таблице (табл. 9) вместе с реальными статистическими данными за тот же промежуток времени.

	Номер сессии								
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Прогноз	8	6	7	8	13	19	20	18	18
Стат. данные	8	6	7	4	7	13	20	22	18

Таблица 9: Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий по численному решению системы (1.1) методом Рунге-Кутты

Графически результаты построения прогноза тремя рассмотренными методами представлены на рисунке:

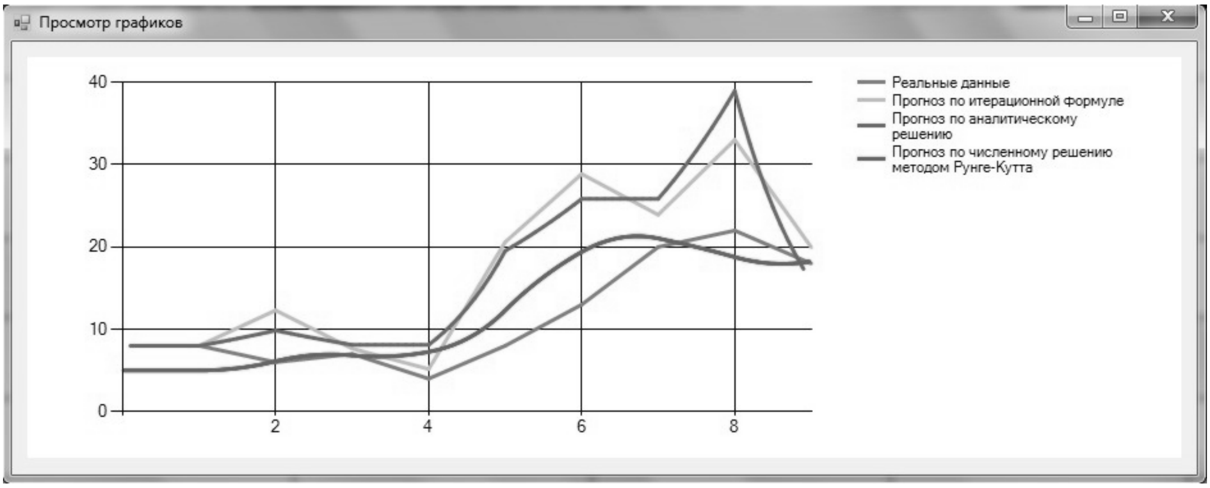

Рисунок **3.4**

Результаты прогнозирования количества претендентов на поступление в аспирантуру для 2007 потока в разрезе сессий

Среднеквадратичное отклонение прогнозируемых данных от реальной статистики для каждого из рассмотренных методов не превышает 23%, что говорит о том, что точность полученных результатов допустима с точки зрения математического моделирования в социологических исследованиях. Таким образом, построенная математическая модель позволяет прогнозировать динамику численности претендентов на поступление в аспирантуру на основе статистических данных за несколько лет, предшествующих прогнозируемому отрезку времени.

Список литературы

1. Атряхин В. А., Шаманаев П. А., “Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:1 (2012), 53-58.

2. Прасолов А. В., *Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии*, Издательство «Лань», СПб., 2010, 192 с.

On the use of systems of differential equations with delay in predicting the dynamics of socio-economic processes

© **V.A. Atryahin**[3], **P.A. Shamanaev**[4]

Abstract. This paper describes three approaches to solving systems of differential equations with delay. Offered examples of the use of the proposed mechanisms for predicting the dynamics of reproduction of scientific personnel. The results of the forecast is in this article.
Key Words: the system of differential equations with deviating argument, the method of least squares, the Cauchy problem

[3] Assistant of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

[4] Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.