УДК 517.9

Бифуркация удвоения периода на простой дуге, соединяющей диффеоморфизмы Пикстона

© О.В. Починка[1], А.А. Романов[2]

Аннотация. Диффеоморфизм Пикстона определяется тем, что он структурно устойчив и его неблуждающее множество состоит ровно из четырёх точек: двух стоков, источника и седла. Несмотря на кажущуюся простоту, среди них есть представители с диким поведением сепаратрис. Тем не менее, как следует из [2], любые диффеоморфизмы класса Пикстона, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек, соединяются простой дугой. При этом дуга содержит только седло-узловые бифуркации. В настоящей работе мы строим простую дугу с одной бифуркацией удвоения периода между диффеоморфизмом Пикстона с периодическими стоками и диффеоморфизмом типа "источник-сток". Используя результаты работы [2], это позволяет констатировать наличие простой дуги между любыми диффеоморфизмами Пикстона.

Ключевые слова: диффеоморфизм Пикстона, простая дуга, бифуркация удвоения периода.

1. Введение

В [5] Ш.Ньюхаусом и М. Пейшото было доказано, что любые потоки Морса-Смейла связаны между собой простой дугой. Простота означает, что дуга содержит не более конечного числа точек вне потоков Морса-Смейла и, грубо говоря, для этих особых точек соответствующие пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий наименьшим образом отклоняются от структурно устойчивого состояния.

Для дискретных динамических систем ситуация иная. Два сохраняющих ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на окружности могут быть соединены *простой дугой* (см. определение 2.1. ниже), если и только если они имеют одинаковое число вращения. Как следует из работ Ш. Мацумото [4] и П. Бланшара [1], любая ориентируемая замкнутая поверхность допускает изотопные диффеоморфизмы Морса-Смейла, которые не могут быть соединены простой дугой. Начиная с размерности 3 эта проблема не является тривиальной даже для диффеоморфизмов типа "источник-сток". В [2] было показано, что на $\mathbb{S}^6$ существуют два таких диффеоморфизма, которые не могут быть соединены гладкой дугой, но на $\mathbb{S}^3$, они соединяются гладкой дугой, состоящей из диффеоморфизмов "источник-сток".

Как известно теперь, в размерности $n = 3$ ситуация с диффеоморфизмами Морса-Смейла усугубляется наличием дико вложенных сепаратрис (компонент связности инвариантных многообразий периодических точек без самих точек) седловых точек. Первый "дикий" пример был построен в классе Пикстона в [7], этот класс состоит из трёхмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла, у которых неблуждающее множество состоит ровно из четырёх точек: двух стоков, источника и седла. Как следует из [2], любые диффеоморфизмы класса Пикстона, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек, соединяются простой дугой. В настоящей работе мы обобщаем этот результат, снимая ограничение на неподвижность неблуждающих точек.

[1] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; olga-pochinka@yandex.ru
[2] Магистрант кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; romanov18.04@mail.ru

2. Формулировка результатов

Пусть $Diff(M^n)$ — множество диффеоморфизмов на замкнутом многообразии M^n с C^1-топологией. *Гладкой дугой* в $Diff(M^n)$ называется гладкое отображение $\xi : M^n \times [0,1] \to M^n$, или, что эквивалентно, гладко зависящее от t семейство диффеоморфизмов $\{\xi_t \in Diff(M^n),\ t \in [0,1]\}$. Для описания типичных свойств гладкой дуги (выполняющихся для всех дуг из счетного пересечения открытых плотных подмножеств в пространстве гладких дуг) мы напомним следующие понятия.

Пусть $KS(M^n)$ множество всех диффеоморфизмов *Купки-Смейла*, то есть диффеоморфизмов, периодические орбиты которых гиперболические и их устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсальны. Для гладкой дуги ξ множество $B(\xi) = \{t \in [0,1],\ \ xi_t \notin KS(M^n)\}$ называется *бифуркационным множеством*. Для типичного множества дуг бифуркационное множество является счётным и каждая бифуркация $\xi_b,\ b \in B(\xi)$ имеет один из нижеследующих типов с точностью до направления движения по дуге (см., например, [6]). На поясняющих рисунках двойными стрелками схематично изображены направления гиперболического сжатия и растяжения.

1) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_x$ периода k, для которой все собственные значения $(Df^k)_x$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = 1$. Переход через ξ_b сопровождается слиянием и дальнейшим исчезновением гиперболических периодических точек одного и того же периода. Такая бифуркация называется *седло-узеловой* (см. рисунок 1).

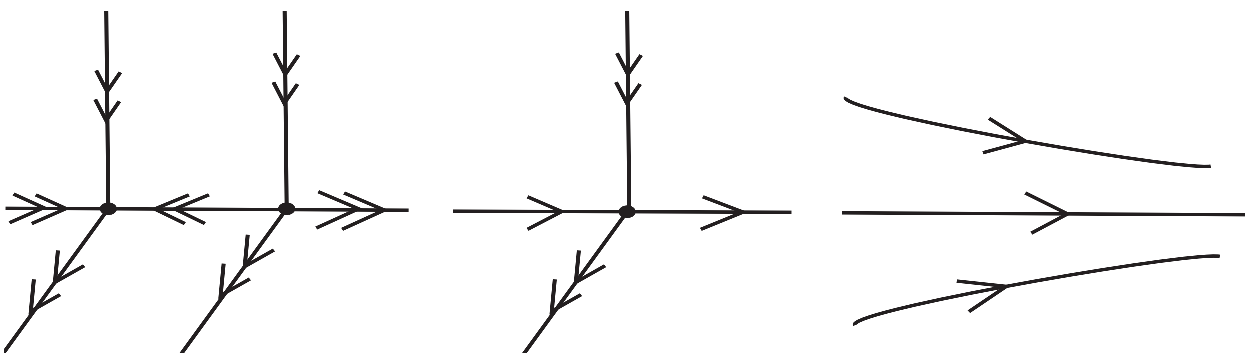

Рис. 1: Бифуркация седло-узел

2) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_x$ периода k, для которой все собственные значения $(Df^k)_x$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = -1$. При переходе через ξ_b, вдоль соответствующего λ собственного направления, аттрактор становится репеллером и рождается периодическая гиперболическая орбита периода $2k$. Такая бифуркация называется *удвоением периода* (см. рисунок 2).

3) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной пары комплексно сопряженных $\lambda, \bar{\lambda}$, где $\lambda = e^{i\theta}$ $0 < \theta < \pi$. При переходе через ξ_b аттрактор становится репеллером и вблизи него появляется инвариантная окружность. Такая бифуркация называется *бифуркацией Хопфа* (см. рисунок 3).

4) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия имеют трансверсальные пересечения вдоль всех траекторий, кроме одной $\mathcal{O}_x$, принадлежащей пересечению $W^s_p \cap W^u_q$ инвариантных многообразий различных периодических точек p, q, при этом $T_xW^s_p + T_xW^u_q$ является $(n-1)$-мерным

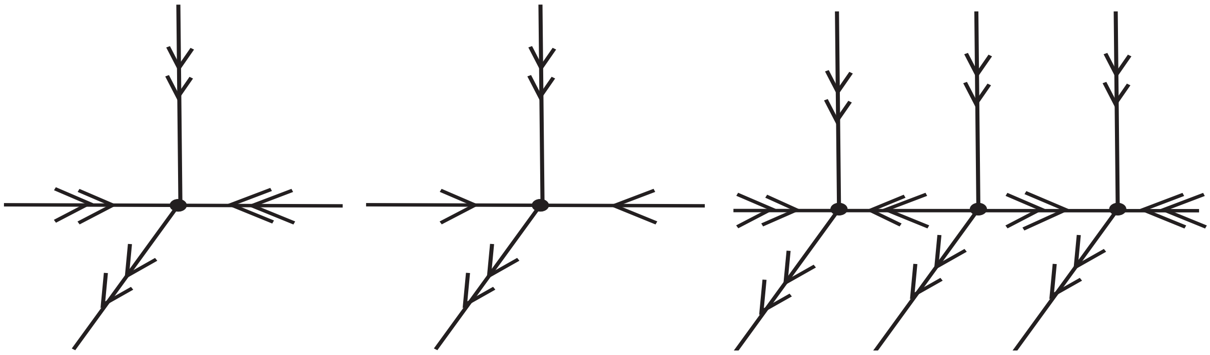

Рис. 2: Бифуркация удвоения периода

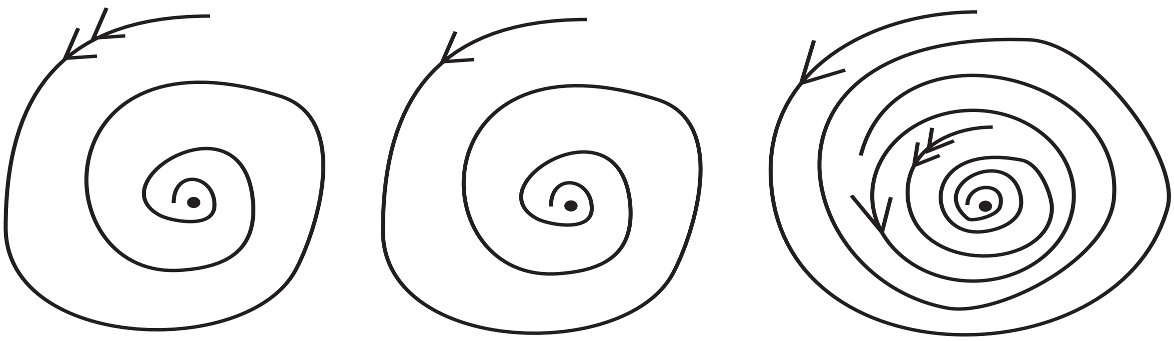

Рис. 3: Бифуркация Хопфа

подпространством T_xM^n. Диффеоморфизмы ξ_{t_1}, ξ_{t_2} являются Ω-сопряженными для значений t_1, t_2 близких к b. Такая бифуркация называется *бифуркацией гетероклинического касания* (см. рисунок 4).

Диффеоморфизм Купки-Смейла с конечным неблуждающим множеством называется диффеоморфизмом *Морса-Смейла.* Обозначим через $MS(M^n)$ множество диффеоморфизмов Морса-Смейла.

Определение 2.1. *Дуга ξ называется простой, если $\xi_t \in MS(M^n)$ для любого $t \in ([0,1] \setminus B(\xi))$, бифуркационное множество $B(\xi)$ конечно и бифуркации имеют один из типов 1)-4) выше.*

Обозначим через $J \subset Diff(\mathbb{S}^3)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов "Северный полюс - Южный полюс", то есть диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых состоят в точности из двух гиперболических точек: источник, сток. В настоящей работе рассматривается класс Пикстона $\mathcal{P}$, сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на 3-сфере $\mathbb{S}^3$ и имеющих неблуждающее множество, состоящее ровно из четырёх точек: двух стоков, источника и седла. Обозначим через $\mathcal{P}_+$ подмножество $\mathcal{P}$, состоящее из всех диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек. Положим $\mathcal{P}_- = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_+$. Следующие предложения доказаны в разделе 4.3.2 книги [3].

Предложение 2.1. *Для любых диффеоморфизмов $f, f' \in J$ существует гладкая дуга $\{f_t \in J\}$ их соединяющая.*

Предложение 2.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in \mathcal{P}_+$ существует простая дуга с одним бифуркационным значением типа седло-узел, соединяющая f с некоторым диффеоморфизмом из множества J.*

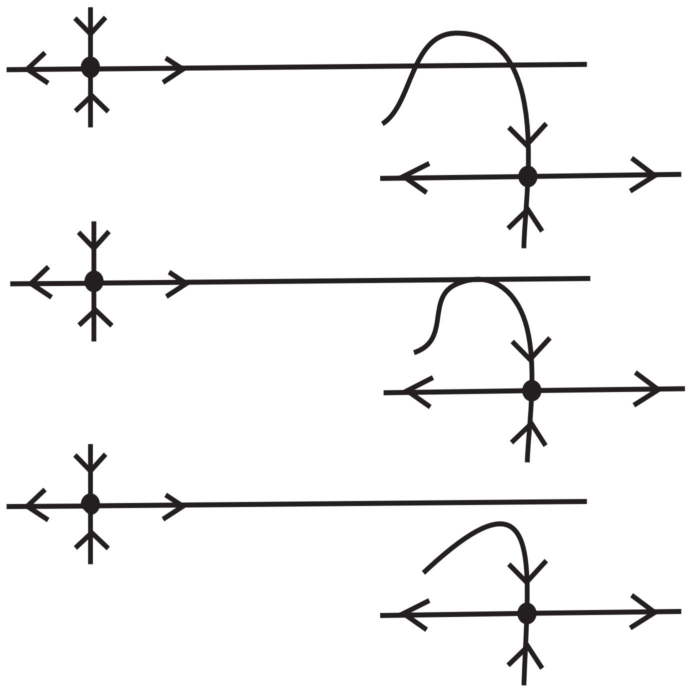

Рис. 4: Бифуркация гетероклинического касания

Основным результатом работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in \mathcal{P}_-$ существует простая дуга $\{f_t \in Diff(\mathbb{S}^3)\}$ с одним бифуркационным значением типа удвоения периода такая, что:*

1) $f_0 = f$, $f_1 \in J$;

2) $f_t \in \mathcal{P}_-$ для всех $t \in [0, \frac{1}{2})$;

3) $f_t \in J$ для всех $t \in (\frac{1}{2}, 1]$;

4) неблуждающее множество диффеоморфизма $f_{\frac{1}{2}}$ состоит из одного гиперболического источника и одного негиперболического стока.

Следствием вышеприведённых предложений и теоремы является следующий результат.

Т е о р е м а 2.2. *Любые диффеоморфизмы $f, f' \in \mathcal{P}$ можно соединить простой дугой.*

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за полезные обсуждения и замечания. Первый автор благодарит гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

3. Построение простой дуги между диффеоморфизмом $f \in \mathcal{P}_-$ и некоторым диффеоморфизмом из класса J

Напомним, что $\mathcal{P}_-$ — класс диффеоморфизмов Морса-Смейла $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, неблуждающее множество которых состоит из неподвижного источника α_f, неподвижного седла σ_f и периодических стоков ω_f^1, ω_f^2; γ_f^1, γ_f^2 — неустойчивые сепаратрисы точки σ_f, содержащие стоки ω_f^1, ω_f^2, соответственно, в своих замыканиях. В силу структурной устойчивости диффеоморфизма f и всюду плотности C^2-диффеоморфизмов в пространстве всех диффеоморфизмов, без уменьшения общности можно считать что диффеоморфизм f имеет класс гладкости C^2. Кроме того, в силу предложения 4.3.1 и леммы 4.3.10 [3], без уменьшения общности можно полагать, что многообразие $W^u_{\sigma_f}$ принадлежит некоторой гладкой кривой l, для которой точки ω^1_f, ω^2_f являются внутренними и $f(l) \subset l$.

Определим на интервале $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ однопараметрическое семейство $P_t(x_3) = (-\frac{10}{9} + \frac{2}{9}t)x_3 + x_3^3$, которое при $t = 0$ имеет вид $P(x_3) = -\frac{10}{9}x_3 + x_3^3$, что соответствует отображению с одной неподвижной точкой O и двумя периодическими точками $x_3 = \frac{1}{3}$ и $x_3 = -\frac{1}{3}$, а при $t = \frac{1}{2}$ принимает вид $P(x_3) = -x_3 + x_3^3$, что соответствует отображению с одной неподвижной негиперболической точкой $x_3 = 0$. При $t = 1$ получится, соответственно, отображение $P(x_3) = -\frac{8}{9}x_3 + x_3^3$ с одной неподвижной гиперболической точкой $x_3 = 0$.

Положим $\tilde{R}_t(x_3) = \begin{cases} P_t(x_3), x_3 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ \frac{(8t-31)x_3}{36}, x_3 \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty). \end{cases}$

Рассмотрим однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $\zeta_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданное формулой $\zeta_t(x_1, x_2, x_3) = (Q(x_1, x_2), R_t(x_3))$, где $Q(x_1, x_2) : Ox_1x_2 \to Ox_1x_2$ — меняющий ориентацию диффеоморфизм с гиперболическим стоком $O(0,0,0)$, заданный формулой $Q(x_1, x_2) = (-\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2)$ и $R_t : Ox_3 \to Ox_3$ — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов, получающееся $\tilde{R}_t$ сглаживанием в точках $\pm\frac{1}{2}$. Положим $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ({x_1}^2 + {x_2}^2 \leq 1, -\frac{1}{2} \leq x_3 \leq \frac{1}{2})\}$. Заметим, что $\zeta_t(C) \subset int\ C$.

Выберем окрестность $V \subset \mathbb{S}^3$ множества $cl(W^u_{\sigma_f})$ такую, что $f(V) \subset V$ и гомеоморфизм $\eta : V \to C$, сопрягающий $f|_V$ с $\zeta_0|_C$, со следующими свойствами:

1) V не содержит источник α_f;

2) $\eta(V \cap l) = Ox_3 \cap C$, $\eta(\omega^1_f) = (0, 0, -\frac{1}{3})$, $\eta(\sigma_f) = (0, 0, 0)$ и $\eta(\omega^2_f) = (0, 0, \frac{1}{3})$.

Определим на V изотопию g_t формулой $g_t = \eta^{-1}\zeta_t\eta$. Заметим, что $g_0 = f$. Аналогично построениям в доказательстве леммы 4.3.4 [3] можно построить искомую изотопию f_t, она совпадает с изотопией g_t на V, и для каждого $t \in [0, 1]$ имеет единственную неблуждающую точку α_f вне V.

Список литературы

1. Blanchard P., “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.*, **47**:1 (1980), 33–46.

2. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Починка О.В., “Бифуркации диффеоморфизмов Морса-Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Труды МИ РАН.*, **256** (2007), 54–69.

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, М. - Ижевск, 2011.

4. Matsumoto S., “There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs”, *Invent. Math.*, **51** (1979), 1–7.

5. Newhouse S., Peixoto M.M., “There is a simple arc joining any two Morse-Smale flows”, *Asterisque*, **31** (1976), 15–41.

6. Palis J., “Arcs of dynamical systems: bifurcations and stability”, *Lecture Notes in Mathematics*, **468** (1975), 48–53.

7. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.

Period-doubling bifurcation in a simple arc connecting Pixton’s diffeomorphisms

© O. V. Pochinka[3], A. A. Romanov[4]

Abstract. Pixton’s diffeomorphism determined that it is structurally stable and its nonwandering set consists of exactly four points: two sinks, a source and a saddle. Class of such diffeomorphisms include representatives with the wild behavior of the separatrices. However, as in [2] was proved that all Pixton’s diffeomorphisms whose nonwandering set consists of fixed points are connected by a simple arc. In this arc only saddle-node bifurcation exists. In this paper we construct a simple arc with period-doubling bifurcation between Pixton’s diffeomorphism with periodic sinks and diffeomorphism of “source-sink”. Using the results and [2], it is possible to claim that a simple arc between any Pixton’s diffeomorphisms exist

Key Words: Pixton’s diffeomorphism, simple arc, period-doubling bifurcation.

[3] Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; olga-pochinka@yandex.ru

[4] Undergraduate of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; romanov18.04@mail.ru