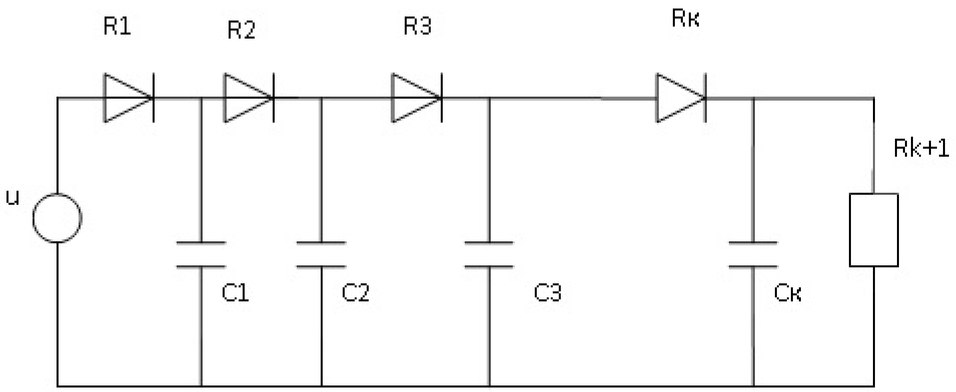
Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений электрических цепей численным метоом

© Е. А. Черноиванова[1]

Аннотация. В работе рассматривается численный метод решения задачи Коши, предложенный Е.В.Воскресенским, для дифференциальных уравнений с правой частью типа Каратеодори. Этот метод применяется для уравнений, описывающих зависимость падений напряжений на конденсаторах от других элементов цепи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, задача Коши, асимптотическая эквивалентность по Левинсону, численное решение задачи Коши с наперед заданной точностью

Рассмотрим численный метод решения задачи Коши, при помощи которого с любой наперед заданной точностью можно вычислить решения дифференциальных уравнений на любом компакте из $[0,+\infty)$. Пусть дифференциальные уравнения описывают электрическую цепь, изображенную на рисунке:



Здесь C_j - емкость j-го конденсатора в цепи, R_j - сопротивления диодов $(j=\overline{1,k})$, i_p - величина тока $p=\overline{0,2k}$, R_{k+1} - активное сопротивление.

В общем случае система уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \tag{1.1}$$

$f\in C([T,+\infty)\times R_n,R_n)$. Вопросу решения задачи Коши $x(t_0)=x_0, T\le t_0\le+\infty, x_0\in R^n$ посвящено много работ. Можно применить метод последовательных приближений, который здесь всегда является сходящимся. Однако скорость и область сходимости зависят как от f, так и от начального условия - точки (x_0,t_0). Применим численный метод [1] решения задачи Коши для уравнения (1.1), когда функция f типа Каратеодори. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(x)+f(t,x), \tag{1.2}$$

$$\frac{dx}{dt}=Ay, \tag{1.3}$$

[1] Доцент кафедры общеобразовательных дисциплин, Саранский кооперативный институт; elen.chernoivanova@yandex.ru

A - матрица с постоянными коэффициентами.

Пусть все решения уравнения (1.3) являются ограниченными и

$$\| \ f(t,x)| \leq \psi(t)\|x\|, \int_T^{+\infty} \psi(t)dt < +\infty$$

также

$$\|f(t,x_1) - f(t,x_2)\| \leq \varphi(t)\|x_1 - x_2\|, \text{ при любых } x_1, x_2 \in R^n$$

$$\int_T^{+\infty} \psi(t)dt < +\infty$$

Требуется найти решение задачи Коши $x(t_0) = x_0, T \leq t_0 \leq +\infty, x_0 \in R^n$ для уравнения (2). В этом случае уравнения (2) и (3) являются асимптотически эквивалентными по Левинсону на всем пространстве R^n. Здесь в качестве функций сравнения можно взять $\mu_i = 1, i = \overline{1,n}$. Следовательно, существует биекция $P : R^n \to R^n$ такая, что

$$x(t : t_0, x_0) = y(t : t_0, Px_0) + O(1), t \to +\infty.$$

$$y_0 = Px_0 = x_0 + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y^{-1}(s)f(s, x(s))ds$$

Тогда решение $x(t : t_0, x_0)$ можно представить как

$$x(t : t_0, x_0) = Y(t)Px_0 - Y(t) \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y^{-1}(s)f(s, x(s : t_0, x_0))ds$$

Пусть X - банахово пространство всех ограниченных непрерывных вектор-функций на множестве $[T, +\infty)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t\in[T,+\infty)} \|x(t)\|, x \in X$.

В пространстве X рассмотрим оператор

$$Lx = Y(t)Px_0 - Y(t) \int\limits_t^{+\infty} Y^{-1}(s)f(s, x(s))ds$$

Этот оператор действует из X в X. Тогда

$$\|Lx_1 - Lx_2\| \leq \int\limits_t^{+\infty} \|Y(t)Y^{-1}(s)\|\varphi(s)\|x_1 - x_2\|ds.$$

Отсюда

$$\rho(Lx_1, Lx_2) \leq \int\limits_t^{+\infty} \|Y(t)Y^{-1}(s)\|\varphi(s)\rho(x_1, x_2)ds$$

$$\|Y(t)\| \leq C, \|Y(t)Y^{-1}(s) \leq C_1\|, t \geq T, \text{ следовательно, } \rho(Lx_1, Lx_2) \leq C_1 \int\limits_t^{+\infty} \varphi(s)\rho(x_1, x_2)ds$$

При достаточно большом $T, t_0 \geq T$, можно считать, что $C_1 \int\limits_t^{+\infty} \varphi(s)ds$ меньше единицы. Поэтому $\rho(Lx_1, Lx2) \leq q\rho(x_1, x_2), 0 < q < 1$, оператор L является оператором сжатия в пространстве X. Следовательно, если рассматривать итерационный процесс

$$x_{n+1} = Lx_n, x_n \in X,$$

то он является сходящимся при любом выборе первоначальной точки итерации x_0 и достаточно большом t_0. Кроме того,

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq \frac{q^n}{1-q}\|x_1 - x_0\|.$$

В численных методах приходится вычислять решения на конкретном компакте τ_1, τ_2. Тогда

$$\|x_n(t:t_0,x_0) - x_{n-1}(t:t_0,x_0)\| \leq \frac{(q(t))^n}{1-q(t)}\|x_1(t:t_0,x_0) - x_0(t:t_0,x_0)\|, t \in (\tau_1, \tau_2).$$

Здесь $q(t) = C_1 \int\limits_t^{+\infty} \varphi(s)ds$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} = 0$, то с увеличением τ_1 скорость сходимости увеличивается, $q(t)$ не зависит от выбора точки x_0.

Применим рассмотренный численный метод к решению задачи Коши для уравнений, описывающих зависимость падений напряжений на конденсаторах от других элементов цепи. Пусть система принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = -(R_1^{-1} + R_2^{-1})x_1 + R_2^{-1}x_2 + R_1^{-1}u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = R_2^{-1}x_1 - (R_2^{-1} + R_3^{-1})x_2$$

Пусть $u(t, x_1, x_2) = \frac{\cos(x_1)}{t^2}x^2$ - величина источника напряжения в цепи.

Для уравнений (6) выполняются условия (4), (5):

$$\|f(t,x,u)\| \leq \frac{\alpha_1}{t^2}\|x\|, \|f(t,\overline{x_1}) - f(t,\overline{x_2})\| \leq \frac{1}{t^2}\|\overline{x_1} - \overline{x_2}\|, \forall \overline{x_1}, \overline{x_2} \in R^2$$

Компоненты оператора L примут вид

$$Lx_1^{(n)} = e^{r_1t}y_{01} + e^{r_2t}y_{02} + \int\limits_t^{+\infty}(\frac{r_2+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{r_1(t-s)} - \frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{r_2(t-s)})\alpha_1\frac{\cos {x_1}^{n-1}}{s^2}x_2^{n-1}ds,$$

$$Lx_2^{(n)} = \frac{1}{\alpha_2}(r_1+\alpha_1+\alpha_2)e^{r_1t}y_{01} + \frac{1}{\alpha_2}(r_2+\alpha_1+\alpha_2)e^{r_2t}y_{02} +$$

$$+ \int\limits_t^{+\infty}\frac{(r_1+\alpha_1+\alpha_2)}{(r_1-r_2)\alpha_2}(e^{r_1(t-s)} - e^{r_2(t-s)})\alpha_1\frac{\cos x_1^{n-1}}{s^2}x_2^{(n-1)}ds$$

где

$$y_{01} = x_1^0 + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y^{-1}(s)f(s,x(s))ds = 1 + \int\limits_1^{+\infty}\frac{r_2+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{-r_1s}\frac{\cos x_1^0}{s^2}s_2^0ds$$

$$y_{02} = x_2 + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y^{-1}(s)f(s,x(s))ds = 1 - \int\limits_1^{+\infty}\frac{r_1+\alpha_1+\alpha_2}{r_2-r_1}e^{-r_1s}\frac{\cos x_1^0}{s^2}x_2^0ds$$

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

Numerical method for the Cauchy problem for differential equations describing the dependence of the voltage drop

© **E. A. Chernoivanova**[2]

Abstract. This paper deals with numerical method for the Cauchy problem for differential equations with right part of Karateodory type. That was proposed by E.V. Voskrecensky. This method is applied to the equations describing the dependence of the voltage drop across the condensers on the other elements of the electrical circuit.
Key Words: differential equation, Cauchy problem, asymptotic equivalence on Levinson, numerical method of solution of Cauchy problem with preassigned accuracy..

[2] Associate professor of general educational disciplines, Saransk cooperative institute, Saransk; elen.chernoivanova@yandex.ru