В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.984.54

К вопросу об идентификации нераспадающихся краевых условий

© **А.М. Ахтямов**[1,2], **А.В. Муфтахов**[3,4]

Аннотация. Доказан критерий однозначности восстановления нераспадающихся краевых условий для спектральной задачи с дифференциальным уравнением 2-го порядка по 2 собственным значениям. Предъявлено явное решение задачи. Показана корректность задачи. Приведены примеры восстановления краевых условий для конкретных спектральных задач.
Ключевые слова: обратная спектральная задача, собственные значения, краевые условия.

1. Постановка задачи

Обратным спектральным задачам посвящено большое количество работ (подробнее см. [1-9]. Исследованиями в этом направлении занимались Н. Левинсон, А.Н. Тихонов, М.Г. Крейн, М.Г. Гасымов, Б.М. Левитан, В.А. Марченко, В.А. Садовничий, В.А. Юрко и другие.

Первой работой, посвященной изучению обратной несамосопряженной задачи с неизвестными нераспадающимися краевыми условиями была статья В.А. Садовничего [10], в которой было показано, что в случае уравнения вида $-y''+q(x)y=\lambda\, y$ для однозначности восстановления функции $q(x)$ и коэффициентов нераспадающихся краевых условий требуется три спектра связанных между собой задач и другие дополнительные спектральные данные. Впоследствии восстановлению коэффициентов дифференциального уравнения и нераспадающихся краевых условий посвятили свои работы М.Г. Гасымов, И.М. Гусейнов, И.М. Набиев, О.А. Плаксина, В.А. Юрко, Б.Е. Кангужин и другие авторы [9-12]. Были изучены и неполные обратные задачи — задачи восстановления только краевых условий (подробнее см. [13]). Так, в работах [13, 14] была рассмотрена задача восстановления общих нераспадающихся краевых условий для спектральной задачи с дифференциальным уравнением 2–го порядка

$$l(y)=y''(x)+(\lambda\, p_1+p_2(x))\, y'(x)+(\lambda^2\, q_1+\lambda\, q_2(x)+q_3(x))\, y(x)=0, \tag{1.1}$$

$$U_l(y)=\sum_{k=1}^{2}\left(a_{lk}\, y^{(k-1)}(0)+a_{l\,k+2}\, y^{(k-1)}(1)\right)=0, \quad l=1,2, \tag{1.2}$$

где λ — спектральный параметр; $x\in[0,1]$; $p_2(x),\, q_2(x)\in C^1[0,1]$; $q_3(x)\in C[0,1]$; $a_{lk},\, p_1,\, q_1\in\mathbb{C}$.

[1] Зав. кафедрой механики сплошных сред, Башкирский государственный университет, г. Уфа; akhtyamovam@mail.ru
[2] Ведущий научный сотрудник, Институт механики УНЦ РАН, г. Уфа
[3] Lector, The Jerusalem College of Engineering, Jerusalem, Israel; muftahov@yahoo.com
[4] Lector, Sami Shamoon Engineering College, Be’er Sheva, Israel

Было показано, что при выполнении определенных условий краевые условия (1.2), содержащие 8 неизвестных коэффициентов a_{lk}, по 5 собственным значениям задачи (1.1),(1.2) восстанавливаются однозначно.

Настоящая статья посвящена продолжению этих исследований. В статье дается ответ на вопрос о том, сколько собственных значений нужно для однозначного восстановления краевых условий вида:

$$U_1(y) = a_{11}\,y(0) + a_{12}\,y'(0) + a_{13}\,y(1) = 0, \tag{1.3}$$

$$U_2(y) = a_{21}\,y(0) + a_{22}\,y'(0) + a_{23}\,y(1) = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{lk} краевых условий (1.3), (1.4) через A:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \right\|, \tag{1.5}$$

а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через M_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

Векторы будем выделять жирным шрифтом — $\mathbf{a}$. Символом ^{T} будем обозначать транспонирование. Вектор-строка с этим индексом — $(a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ — будет обозначать вектор-столбец. Через $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ будем обозначать линейную оболочку, построенную на векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Ранг матрицы A будем обозначать через $\mathrm{rank}\, A$.

Название статьи связано с идентификацией краевых условий. Что же означает найти краевые условия? На первый взгляд может показаться, что это означает, что нужно найти все коэффициенты a_{lk} матрицы A. Однако это ошибочное утверждение. Дело в том, что одно и то же краевое условие может иметь совершенно разные коэффициенты. Например, условия $y(0) = 0$ и $5\,y(0) = 0$ имеют совершенно разные коэффициенты a_{11}. В первом случае это 1, а во втором — это 5. Однако эти коэффициенты соответствуют одному и тому же краевому условию. Поэтому нужно искать матрицу A с точностью до линейных преобразований ее строк, а не коэффициенты a_{lk}.

Обратная задача формулируется следующим образом: *коэффициенты a_{lk} форм $U_l(y)$, $l = 1, 2$ спектральной задачи (1.1), (1.3), (1.4) — неизвестны;* $\mathrm{rank}\, A = 2$; *известны собственные значения λ_m задачи (1.1), (1.3), (1.4). Требуется найти краевые условия (1.3), (1.4), т.е. восстановить матрицу A вида (1.5) с точностью до линейных преобразований ее строк.*

Очевидно, что задание матрицы A вида (1.5) с точностью до линейных преобразований ее строк эквивалентно заданию линейной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, построенной на векторах $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$.

В настоящей статье доказано, что для однозначного восстановления краевых условий (1.3), (1.4) достаточно двух собственных значений.

Заметим, что если известно, какой именно минор M_{ij} матрицы A отличен от нуля, то краевые условия (1.3), (1.4) упрощаются. Например, если известно, что $M_{12} \neq 0$, то краевые условия можно привести к следующему виду: $y(0) + \widetilde{a}_{13}\,y(1) = 0$, $y'(0) + \widetilde{a}_{23}\,y(1) = 0$. Тогда для поиска двух неизвестных коэффициентов $\widetilde{a}_{13}$, $\widetilde{a}_{13}$ можно использовать только два собственных значения.

Такое решение справедливо, если заранее известно, какой из миноров M_{ij} матрицы A отличен от нуля. В нашей же постановке задачи известно лишь, что ранг матрицы

A равен 2 и неизвестно какой из миноров M_{ij} отличен от нуля. Поэтому условия теоремы должны даваться не в терминах миноров, которые нам неизвестны, а в терминах известных собственных значений.

Ниже соответствующая теорема об идентификации краевых условий (1.3), (1.4) получена. В статье показано также, что малым изменениям собственных значений соответствуют малые изменения краевых условий. Выявлена интересная связь поставленной задачи с задачами линейной алгебры и аналитической геометрии.

2. Критерий единственности решения задачи

Пусть $\{y_n(x,\lambda)\}_{n=1,2}$ — фундаментальная система решений уравнения (1.1), удовлетворяющая условиям $y_n^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{nk},\ \ n,k\ =\ 1,2$

Числа $\lambda_m,\ m = 1,2$ являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) тогда и только тогда, когда они являются нулями характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} \tag{2.1}$$

(см. [15, с.1–16]), а значит, и решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_1) = -M_{23}\, y_1(1,\lambda_1) - M_{31}\, y_2(1,\lambda_1) + M_{12} = 0, \\ \Delta(\lambda_2) = -M_{23}\, y_1(1,\lambda_2) - M_{31}\, y_2(1,\lambda_2) + M_{12} = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

При решении обратной задач на систему (2.2) можно смотреть как на систему линейных уравнений относительно неизвестных $x_1 = M_{23}$, $x_2 = M_{31}$, $x_3 = M_{12}$. Определитель этой системы линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3 обозначим через F:

$$F = \begin{Vmatrix} -y_1(1,\lambda_1) & -y_2(1,\lambda_1) & 1 \\ -y_1(1,\lambda_2) & -y_2(1,\lambda_2) & 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.3}$$

а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через F_{ij}, $i,j = 1,2,3$.

Т е о р е м а 2.1. (о единственности решения) *Решение обратной задачи восстановления краевых условий (1.3), (1.4) по двум собственным значениям λ_1, λ_2 задачи (1.1), (1.3), (1.4) единственно тогда и только тогда, когда для собственных значений λ_1 и λ_2 ранг матрицы (2.3) равен 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено выше задание краевых условий (1.3), (1.4) эквивалентно заданию линейной оболочки $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$, построенную на векторах $\mathbf{a}_1 = (a_{11},a_{12},a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2 = (a_{21},a_{22},a_{23})^T$.

Достаточность. Пусть для собственных значений λ_1 и λ_2 ранг матрицы (2.3) равен 2 ($\mathrm{rank}\, F = 2$). Тогда хотя бы один из миноров F_{ij} не равен нулю.

Отсюда следует, что решение системы (2.2) представляет собой вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})$, определяемый с точностью до ненулевого множителя. Покажем это. Не ограничивая общности будем считать, что $F_{12} = y_1(1,\lambda_1)\, y_2(1,\lambda_2) - y_2(1,\lambda_1)\, y_1(1,\lambda_2) \neq 0$. Тогда матрицу F с помощью линейных преобразований строк можно привести к следующей матрице:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -F_{23}/F_{12} \\ 0 & 1 & F_{13}/F_{12} \end{Vmatrix} \tag{2.4}$$

Поэтому система (2.2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{array}{l} M_{23} - \frac{F_{23}}{F_{12}} M_{12} = 0, \\ M_{31} + \frac{F_{13}}{F_{12}} M_{12} = 0, \end{array} \tag{2.5}$$

имеющей следующее решение:

$$M_{12} = C, \quad M_{31} = \frac{F_{31}}{F_{12}} C, \quad M_{23} = \frac{F_{23}}{F_{12}} C, \tag{2.6}$$

где C — произвольная константа, отличная от нуля. (Случай $C = 0$ противоречит условию теоремы, согласно которой $\operatorname{rank} A = 2$.) Как видим из (2.6), вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Заметим, что если отличен от нуля другой минор матрицы F (не F_{12}), то найденный вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ также совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Покажем это на примере минора F_{23}. Пусть $F_{23} = y_2(1,\lambda_2) - y_2(1,\lambda_1) \neq 0$. Тогда матрицу F с помощью линейных преобразований можно привести к следующей матрице:

$$\left\| \begin{array}{ccc} F_{13}/F_{23} & 1 & 0 \\ -F_{13}/F_{23} & 0 & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.7}$$

Поэтому система (2.2) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{F_{13}}{F_{23}} M_{23} + M_{31} = 0, \\ -\frac{F_{12}}{F_{23}} M_{23} + M_{12} = 0, \end{array} \tag{2.8}$$

имеющей следующее решение:

$$M_{12} = \frac{F_{23}}{F_{12}} C_1, \quad M_{31} = \frac{F_{31}}{F_{12}} C_1, \quad M_{23} = C_1, \tag{2.9}$$

где C_1 — произвольная константа, отличная от нуля. Из (2.9) также следует, что вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов.

Таким образом, решение системы (2.2) представляет собой вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$, определяемый с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов. Этот вектор определяет единственную плоскость в трехмерном пространстве, содержащую в себе начало координат и совпадающую с линейной оболочкой $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, построенной на векторах $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})^T$ и $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})^T$. Таким образом, матрица A и краевые условия (1.3), (1.4) определяются однозначно с точностью до линейных преобразований строк.

Более того, как было показано выше вектор $\mathbf{N} = (M_{23}, M_{31}, M_{12})^T$ совпадает с вектором $\mathbf{F} = (F_{23}, F_{31}, F_{12})^T$ с точностью до ненулевого множителя не зависящего от индексов. Поэтому совпадают и линейные оболочки $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ и $\operatorname{Span}(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)$, где $\mathbf{f}_1 = (-y_1(1,\lambda_1), -y_2(1,\lambda_1), 1)^T$, $\mathbf{f}_2 = (-y_1(1,\lambda_2), -y_2(1,\lambda_2), 1)^T$. Следовательно с точностью до линейных преобразований строк верны равенства

$$A = F = \left\| \begin{array}{ccc} -y_1(1,\lambda_1) & -y_2(1,\lambda_1) & 1 \\ -y_1(1,\lambda_2) & -y_2(1,\lambda_2) & 1 \end{array} \right\|. \tag{2.10}$$

Необходимость. Пусть краевые условия (1.3), (1.4) восстанавливаются по двум собственным значениям λ_1, λ_2 задачи (1.1), (1.3), (1.4) однозначно. Тогда матрица A определяется однозначно с помощью линейного преобразования строк, а ее миноры M_{ij} находятся однозначно с точностью до ненулевого коэффициента, не зависящего от индексов. Покажем, что тогда ранг матрицы (2.3) равен 2 ($\operatorname{rank} F=2$). Предположим противное: $\operatorname{rank} F=1$ (случай $\operatorname{rank} F=0$ исключается поскольку первый столбец матрицы F состоит из единиц). Тогда строки матрицы F должны быть линейно зависимыми. Поскольку первый столбец матрицы F состоит из единиц, то обе строки матрицы F должны совпадать, откуда

$$y_2(1,\lambda_1)-y_2(1,\lambda_2)=0,\quad y_1(1,\lambda_1)-y_1(1,\lambda_2)=0.$$

Следовательно система (2.2) эквивалентна уравнению

$$\Delta(\lambda_1)=-M_{23}\,y_1(1,\lambda_1)-M_{31}\,y_2(1,\lambda_1)+M_{12}=0.$$

Это уравнение с неизвестными минорами M_{23}, M_{31}, M_{12} представляет собой уравнение плоскости с нормальным вектором $(-y_1(1,\lambda_1),-y_2(1,\lambda_1),1)^T$. Вектор $\mathbf{N}=(M_{23},M_{31},M_{12})^T$ сам является нормальным вектором искомой плоскости коэффициентов

$$a_1\,M_{23}-a_2\,M_{13}+a_3\,M_{12}=0,$$

которая совпадает со $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$. Следовательно, искомое множество линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ представляет собой бесконечное множество плоскостей проходящих через начало координат, нормальные векторы которых «пробегают плоскость» с нормальным вектором $\mathbf{f}=\mathbf{f}_1=\mathbf{f}_2=(-y_1(1,\lambda_1),-y_2(1,\lambda_1),1)^T$. Другими словами, искомое множество линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$ представляет собой множество линейных оболочек, для которых смешанное произведение $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{f}$ равно нулю. Итак, предположив, что $\operatorname{rank} F=1$, мы получили бесконечное число линейных оболочек $\operatorname{Span}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)$.

Таким образом, если $\operatorname{rank} F=2$, получаем единственную с точностью до линейных преобразований строк матрицу коэффициентов (2.10). Если $\operatorname{rank} F=1$, то получаем бесконечное число матриц A, определяемых с точностью до линейных преобразований строк. Верно и обратное, если матрица коэффициентов A находится по двум собственным значениям λ_1 и λ_2 однозначно с точностью до линейных преобразований строк, то $\operatorname{rank} F=2$. Если матрица коэффициентов находится по двум собственным значениям λ_1 и λ_2 неоднозначно с точностью до линейных преобразований строк, то $\operatorname{rank} F=1$.
Доказательство закончено.

3. Устойчивость решения

Итак, пусть числа λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) и ранг матрицы $F=F(\lambda_1,\lambda_2)$ равен двум. Тогда, как показано выше, матрицу A краевых условий (1.3), (1.4) можно представить в виде (2.10). Причем это представление единственно с точностью до линейных преобразований ее строк.

Следующий вопрос, который возникает — это вопрос об устойчивости решения.

Ранее авторами для другой задачи уже доказывалась устойчивость решения [16]. Доказательство проводилось с помощью метода Лагранжа. Здесь можно провести аналогичное доказательство. Однако нам представляется более наглядным другое доказательство, основанное на использовании канонических краевых условий, которое мы и приведем здесь.

О п р е д е л е н и е 3.1. *Краевые условия (1.3), (1.4) будем называть каноническими, если соответствующая матрица A имеет вид:*

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.1}$$

Заметим, что к каноническому виду приводятся все краевые условия (1.3), (1.4) за исключением условий Коши $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ (соответствующая спектральная задача для условий Коши не имеет собственных значений, поэтому говорить о задаче восстановления краевых условий по собственным значениям в этом случае не имеет смысла). Из вида уравнения (1.1) следует, что функции $y_1(1, \lambda)$ и $y_2(1, \lambda)$ непрерывно зависят от λ. Поэтому если λ_1 и λ_2 изменятся мало, то и элементы матрицы (2.10) также изменятся мало. Отсюда и вытекает устойчивость соответствующей задачи.

4. Примеры

П р и м е р 4.1. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть известны два ее собственных значения $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2\pi$. Найдем краевые условия, которые соответствуют этим значениям.*

Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения являются функции $y_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$ и $y_2(x, \lambda) = (\sin \lambda x)/\lambda$. Поэтому из (2.10) получаем, что

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

а краевые условия имеют вид: $-y(0) - y'(0) + y(1) = 0$, $-y(0) + y(1) = 0$.

П р и м е р 4.2. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть два ее собственных значения равны $\lambda_1 = 0,01$, $\lambda_2 = 6,29$ (отличаются от собственных значений предыдущего примера не более чем на 0,01). Используя представление (2.10) для матрицы A, получим с точностью до сотых те же самые краевые условия, что и в примере 4.1. Соответствующая матрица A имеет следующий вид:*

$$A = \begin{Vmatrix} -0,99995 & -0,99998 & 1 \\ -0,99998 & -0,002167 & 1 \end{Vmatrix}.$$

П р и м е р 4.3. *Рассмотрим следующую спектральную задачу с дифференциальным уравнением $-y''(x) = \lambda^2 y(x)$ и краевыми условиями (1.3), (1.4). Пусть два ее собственных значения равны $\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_2 = 4\pi$. Используя представление (2.3) для матрицы F, получим:*

$$F = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Откуда следует, что искомое множество линейных оболочек $\mathrm{Span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ представляет собой бесконечное множество плоскостей проходящих через начало координат, нормальные векторы которых «пробегают плоскость» с нормальным вектором $\mathbf{f} = (-1, 0, 1)^T$. Таким образом, существует бесконечное число краевых условий (1.3), (1.4), соответствующих собственным значениям $\lambda_1 = 2\pi$, $\lambda_2 = 4\pi$. В качестве коэффициентов искомых краевых условий годятся любые, для которых смешанное произведение ненулевых *векторов* $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f}$ *равно нулю. Помимо краевых условий* $-y(0) - y'(0) + y(1) = 0$, $-y(0) + y(1) = 0$ *годятся, например, краевые условия* $y(0) = 0$ *и* $y(1) = 0$. *Действительно, в случае этих краевых условий имеем:*

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{f} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Заключение

Подытоживая можно заключить, что если числа λ_1, λ_2 являются собственными значениями задачи (1.1), (1.3), (1.4) и ранг матрицы $F = F(\lambda_1, \lambda_2)$ равен двум, то задача отыскания матрицы A краевых условий (1.3), (1.4) с точностью до линейных преобразований строк является корректной: решение ее: 1) существует, 2) единственно, 3) непрерывно зависит от входных данных λ_1, λ_2. Найден явный вид решения поставленной обратной задачи в виде матрицы (2.10) коэффициентов краевых условий (1.3), (1.4).

Заметим, что для решения задачи идентификации краевых условий вид линейного дифференциального уравнения (1.1) не существенен. Ведь решение задачи (2.10) представляется через фундаментальную систему решений $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$. Линейное дифференциальное уравнение может быть и более общего вида. Главное, чтобы линейно независимые решения $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ были бы непрерывно дифференцируемыми функциями по x и λ.

Задача идентификации краевых условий (1.3), (1.4) имеет особенность по сравнению с общим случаем идентификации краевых условий (1.2). В восстановлении (1.3), (1.4) участвуют все миноры максимального порядка M_{12}, M_{13}, M_{23} (F_{12}, F_{13}, F_{23}). То есть какие бы значения мы им не приписали, всегда найдутся соответствующие краевые условия (1.3), (1.4). В общем случае это не так. Для идентификации общих краевых условий (1.2) необходимо выполнение соотношений Плюккера $M_{12}M_{34} + M_{13}M_{42} + M_{14}M_{23} = 0$ [13, 16]. В этом смысле задача идентификации краевых условий (1.3), (1.4) является уникальной.

Список литературы

1. Левитан Б. М., *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, М., 1984, 240 с.

2. Guliyev N. J., “Inverse eigenvalue problems for Sturm–Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions”, *Inverse Problems*, **21** (2005), 1315–1330.

3. Andrew A. L., “Computing Sturm–Liouville potentials from two spectra”, *Inverse Problems*, **22** (2006), 2069–2081.

4. Binding P. A. and Watson B. A., “An inverse nodal problem for two-parameter Sturm–Liouville systems”, *Inverse Problems*, **25** (2009), 1-19.

5. Nizhnik L., “Inverse nonlocal Sturm–Liouville problem”, *Inverse Problems*, **26** (2010), 1–9.

6. Efendiev R. F., “Spectral analysis for one class of second-order indefinite non-self-adjoint differential operator pencil”, *Applicable Analysis*, **90**:12 (2011), 1837–1849.

7. Савчук А. М., Шкаликов А. А., “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:4 (2010), 34–53.

8. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М., “Обобщение теоремы единственности Борга на случай нераспадающихися краевых условий”, *Доклады Академии наук*, **438**:1 (2011), 1-4.

9. Садовничий В. А., Султанаев Я. Т., Ахтямов А. М., *Обратная задача Штурма-Луивилля с нераспадающимися краевыми условиями*, Изд-во МГУ, М., 2009, 184 с.

10. Садовничий В. А., “Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя”, *ДАН СССР*, **206**:2 (1972), 293–296.

11. Freiling G., Yurko V. A., “On the solvability of an inverse problem in the central symmetric case”, *Applicable Analysis*, **90**:12 (2011), 1819–1828.

12. Гусейнов И. М., Набиев И. М., “Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов”, *Математический сборник*, **198**:11 (2007), 47–66.

13. Ахтямов А. М., *Теория идентификации краевых условий и ее приложения*, Физматлит, М., 2009, 272 с.

14. Ахтямов А. М., “О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **6**:4 (2000), 995–1006.

15. Наймарк М. А., *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 526 с.

16. Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V., “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393–408.

On the identification of nonseparated boundary conditions

© **A.M. Akhtyamov**[5,6], **A.V. Mouftakhov**[7,8]

Abstract. A criterion for uniqueness of the nonseparated boundary conditions restoration for eigenvalue problem with the differential equation of order 2 from two eigenvalues is proved. An explicit solution of the problem is presented. The well-posedness of the problem is showed. Examples of boundary conditions identification for the specific spectral problems are considered.

Key Words: inverse eigenvalue problem, the eigenvalues, the boundary conditions

[5] Chief Researcher, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa; akhtyamovam@mail.ru;

[6] Head of the Continuum Mechanics Chair, Bashkir State University, Ufa

[7] Lector, The Jerusalem College of Engineering, Jerusalem, Israel; muftahov@yahoo.com

[8] Sami Shamoon Engineering College, Israel