УДК УДК 517.929

Задача о существовании равновесного решения системы

© С.В. Зубов[1], М.В. Стрекопытова[2]

Аннотация. В данной статье решается вопрос о существовании равновесного решения системы дифференциальных уравнений и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения.

Ключевые слова: линейное преобразование, ряд, степень, нулевое решение, коэффициент, переменная, устойчивость, функция.

Задача пронозирования поведения моделируемых систем в количественном плане сводится к численному интегрированию уравнений динамики. В качественном плане - к аналитическому исследованию системы для установления структурных особенностей моделируемой системы - наличия инвариантных множеств, характера предельного поведения решений [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему вида

$$\begin{gathered}\dot{X} = PX + \mu F(X, z),\\ \dot{z} = r + \mu h(X, z).\end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$.

Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (1.1) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt, \tag{1.2}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функций F, h следующее:

1) функции $f_1, \ldots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$;

3) имеет место оценка $|h| < k_0 |z|^b (\sum_{i=1}^N x_j)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Рассмотрим следующий случай. Случай нескольких пар чисто мнимых корней [2].

Система (1.1) линейным преобразованием приводится к виду

$$\begin{gathered}\dot{x}_s = -\lambda_s y_s + \mu F_s, \quad \dot{y}_s = \lambda_s x_s + \mu G_s,\\ \dot{\xi}_j = \sum_{i=1}^n p_{ji}\xi_i + \mu g_i, \quad \dot{z} = r + \mu h,\\ s = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь N - мерный $(2k + n = N)$ вектор X перешел в вектор $(x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Собственные числа матрицы $\{p_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части.

[1] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

[2] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

А.М. Ляпунов в своей знаменитой диссертации отмечал, что, если вместо времени взять какую-либо непрерывную частную функцию, вместе со временем возрастающую, то последняя при решении вопроса об устойчивости может играть такую же роль, как и время [3].

Исследуем, как ведут себя переменные x_k, y_k, ξ_j в качестве функции z. Разделим первые $2k+n$ уравнений системы (1.3) на последнее уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{dx_s}{dz} = -\bar\lambda_s y_s + \mu\bar F_s, \quad \frac{dy_s}{dz} = \bar\lambda_s x_s + \mu\bar G_s,\\ \frac{d\xi_j}{dz} = \sum_{i=1}^n p_{ji}\xi_i + \mu\bar g_j.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\bar\lambda_s > 0$. Собственные числа матрицы $\{p_{ji}\}$ имеют отрипцательные вещественные части, и у системы (1.4) имеется нулевое решение. Функции $\bar F_s$, $\bar G_s$, $\bar g_j$ удовлетворяют следующим условиям:

1) они разлагаются в ряды по целым положительным степеням величин x_k, y_k, ξ_j равномерно сходящиеся относительно z при долстаточно малых $|x_k|$, $|y_k|$, $|\xi_j|$;

2) разложения функций $\bar F_s$, $\bar G_s$, $\bar g_s$ не содержат членов, линейных относительно x_k, y_k, ξ_j.

Если мы имеем дело с общим по классификации А.М. Ляпунова случаем, то с помощью преобразований Ляпунова

$$x_s = r_s\cos\theta_s, \quad y_s = r_s\sin\theta_s,$$

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^m r_s^i(\theta_1,\dots,\theta_k,\rho_1,\dots,\rho_k,z),$$

а затем

$$\xi_j = \sum_{i=1}^m r_s^{(i)}(\theta_1,\dots,\theta_k,\rho_1,\dots,\rho_k,z) + \eta_i,$$

не нарушающих вопроса об устойчивости, где $r_j^{(i)}$, $\xi_j^{(i)}$ - однородные формы относительно $\rho_1,\dots,\rho_k$ степени l с периодическими коэффициентами относительно $\theta_1,\dots,\theta_k, m$ - положительное целое число, система (1.4) в общем случае приводима к виду

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R_s, \; \frac{d\theta_s}{dz} = \bar\lambda_s + \mu\theta_s, \; \frac{d\eta_j}{dz} = \sum_{i=1}^m p_{ji}\eta_i + \mu p_j. \tag{1.5}$$

Напомним, что m определяется как наинизшая степень форм относительно $\rho_1,\dots,\rho_k$, обладающих периодическими по $\theta_1,\dots,\theta_k$ коэффициентами, вычисляемыми подстановкой в систему (1.4) выражений

$$r_s = \rho_s + \sum_{i=z}^m r_s^{(i)}(\theta_1,\dots,\theta_k,\rho_1,\dots,\rho_k,z)$$

и приравниванием членов одного порядка в получившихся выражениях [4].

Разложение функций R_s в ряды по степеням $\rho_1,\dots,\rho_k$ при $\eta_1 = 0,\dots,\eta_n = 0$ начинается с форм степени m, которые обладают не зависящими от $theta_s$ коэффициентами. Разложение функций p_j по степеням $\rho_1,\dots,\rho_k$ при $\eta_1 = 0,\dots,\eta_n = 0$ начинаются с форм степени $\nu \ge m+1$. Ряды, в которые разлагаются функции R_s, θ_s, p_j, сходятся равномерно относительно z.

Обозначим $R^{(0)}$ форму порядка m, с которой начинается разложение функции R_s при $\eta_1 = 0$, $\dots$, $\eta_n = 0$.

Т е о р е м а 1.1. *Если нулевое решение системы*

$$\frac{d\rho_s}{dz} = \mu R^{(0)}, \quad s = 1, \ldots, k, \tag{1.6}$$

асимптотически устойчиво, то нулевое решение системы (1.4) *также асимптотически устойчиво. При этом имеют место оценки при* $z \geq 0$

$$|\rho_s| \leq \psi(z), \quad |\eta_j| \leq \psi(z),$$

где

$$\psi(z) = c_1(\sum_{s=1}^{k}(\rho_s^{(0)} + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|) \times (1 + c_2(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s^{(0)}| + \sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|)^{m-1}z)^{-1/m-1}).$$

Здесь c_1, c_2 *- положительные постоянные,* $\rho_s^{(0)}$, $\eta_j^{(0)}$ *- значения* ρ_s, η_j , $z = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.6) существуют положительно определенные функции V и W , обладающие свойствами:

1) функция V имеет порядок $l + 1 - m$, функция W имеет порядок l ;

2) $\frac{\partial V}{\partial z} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} - R_s^{(0)} = -W$.

Построим положительно определенную квадратичную форму, удовлетворяющую уравнению

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_{ji}\eta_i = -\sum_{i=1}^{m} \eta_i^2.$$

Рассмотрим полную производную функции $U = V + V_1$ в силу системы (1.6):

$$\frac{dU}{dz} = \frac{dV}{dz} + \frac{dV_1}{dz} = -W - \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s} \times (R_s - R_s^{(0)}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial \eta_j} p_j.$$

В малой окрестности начала координат справедливы оценки

$$|\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial V}{\partial \rho_s}(R_s - R_s^{(0)})| \leq a[\sum_{s=1}^{k} |\rho_s|]^{i+1}, \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_1}{\partial n_j} p_j| \leq a[\sum_{s=1}^{k} |p_s|]^{m+1} \sum_{s=1}^{k} |\eta_j| + b \sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2 \sum_{s=1}^{k} |\rho_s|,$$

где $a > 0, b > 0$.

Функция U является положительно определенной, а её производная dU/dt , вычисленная в силу системы (1.6), является отрицательно определенной функцией при $l = m + 1$. Следовательно, решение

$$\rho_1 = \ldots = \rho_k = 0, \quad \eta_1 = \ldots = \eta_m = 0,$$

$$\theta_1 = \lambda_1 z,\ \theta_2 = \lambda_2 z, \ldots, \theta_k = \lambda_k z$$

системы (1.6) асимптотически устойчиво при $l = m + 1$, и U удовлетворяет неравенствам

$$a_1(\sum_{j=1}^{k}|\rho_s|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j|^2)\le U\le a^2(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta+j|^2), \tag{1.8}$$

где $a_1>0$, $a_2>0$.

В малой окрестности начала координат справедливы неравенства

$$-b_1U\le\frac{dU}{dz}\le -b_2U^{(m+1)/2}, \tag{1.9}$$

где $b_1>0$, $b_2>0$.

Отсюда следует

$$U\le U_0(1+\frac{m-1}{2}b_2U_0^{(m-1)/2}z)^{-2/(m-1)}. \tag{1.10}$$

Из (1.8), (1.9) следует

$$U\le a_2(\sum_{j=1}^{k}|\rho_s^{(0)}|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|^2)\times$$

$$\times(1+\frac{m+1}{2}b_2a_1\times(\sum_{s=1}^{k}|\rho_s^{(0)}|^2+\sum_{j=1}^{n}|\eta_j^{(0)}|^2)^{(m-1)/2}z)^{-2/(m-1)}.$$

Отсюда и из неравенства (1.10) и следуют доказываемые оценки (1.7).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. *Из теоремы и определения величин ρ_s, η_j следует, что при $z\ge 0$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}|x_s|\le\bar\psi(z),\ |y_s|\le\bar\psi(z),\\ |\xi_j|\le\bar\psi(z),\ s=1,\dots,k,\ j=1,\dots,k,\end{gathered} \tag{1.11}$$

где

$$\bar\psi(z)=c_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)\times$$

$$\times(1+c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x+s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)^{m-1}z)^{-1/(m-1)};$$

параметры c_1, c_2 в функции $\bar\psi(z)$ будут зависеть от коэффициентов в разложениях r_s, $\bar\xi_j$. Получив оценки для $|x_s|$, $|y_s|$, $|\xi_j|$, вернемся к уравнению $\dot z=r+\mu h$. Оценим величину h:

$$h\le k_0z^bc_1(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{(0)}|)\times$$

$$\times(1+c_2(\sum_{s=1}^{k}(|x_s^{(0)}|+|y_s^{(0)}|)+\sum_{j=1}^{n}|\xi_j^{0}|)^{m-1}z)^{-\alpha/(m-1)}.$$

Исследуем, при каких условиях $z\to\infty$ при $t\to\infty$. Возможны три случая:

1) $D = b - a/(m-1) = 0$ *;*
2) $D < 0$ *;*
3) $D > 0$ *.*

В первых двух случаях за счет выбора $x_s^{(0)}$ *,* $y_s^{(0)}$ *,* $\xi_j^{(0)}$ *,* μ *можно сделать* $|\mu h| < r/2$ *. Тогда* $z \to \infty$ *при* $t \to \infty$ *. В третьем случае можно показать, что для любого конечного* $\bar{z}$ *найдется такое* μ_0 *, что при* $|\mu| \leq \mu_0$ *на любом движении, начинающемся в области* $|x_s^{(0)}| < \delta$ *,* $|y_s^{(0)}| < \delta$ *,* $|\xi_j^{(0)}| < \delta$ *, будут сохраняться неравенства* (1.11)*, а* z *будет постоянно возрастать от 0 до* $\bar{z}$ *при возрастании времени.*

2. Выводы

Результаты, полученные в настоящем работе, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \to \infty$ при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Автоматизация проектирования устойчивости и надежности колебательных систем*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 355 с.
2. С. В. Зубов, М. В. Стрекопытова, *Анализ равновесных движений и расчетная устойчивость*, СПбГУ, СПб, 2010, 446 с.
3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, О. В. Мутлу, М. В. Стрекопытова, *Расчет устойчивости решений дифференциальных уравнений второго порядка с приложениями*, СПбГУ, СПб, 1999, 184 с.
4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 319 с.

The task about existing equally measure solution of system

© **S.V. Zubov**[3], **M.V. Strecopitova**[4]

Abstract. In giving article is solves the question about existing equally weight solution of system differential equations and about behavior solutions this system equations, is beginning in same region equally weight solution.

Key Words: linear transformation, row, degree, zero solution, variable, stability, function.

[3] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[4] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru