Краткие сообщения

УДК УДК 517.929

Орбитальная устойчивость равновесного решения

© **А.В. Зубов[1], О.С. Стрекопытова[2], С.А. Стрекопытов[3]**

Аннотация. В настоящей статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящие движения.

Ключевые слова: собственное число, элементарный делитель, переменная, устойчивость, функция, степень.

При изучении динамики управляемых систем важнейшим вопросом является характер предельного поведения решений. Существование предельного режима в виде инвариантного множества является основой для построения управляемых систем, обладающих целевым множеством фазовых состояний. Обеспечение существования ограниченного предельного режима является основной задачей конструирования инженерных систем. В приложениях также требуется обеспечение выполнения ограничений на геометрические размеры предельного режима. Другим важнейшим аспектом является рассмотрение широкого класса уравнений динамики с достаточно простой структурой, так как именно структура уравнений определяет возможность их инженерной реализации [1].

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{X} &= PX + \mu F(X,z), \\ \dot{z} &= r + \mu h(X,z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $X = (x_1, \dots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0, \mu$ - малый параметр, $F = (f_1, \dots, f_n)$ - векторная, $h(X,z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \dots, x_N, z$.

Если $F(0,z) \equiv 0$, $h(0,z) \equiv 0$, то у системы (1.1) существует семейство неограниченных равновесных решений

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt,$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать относительно функцтй F, h следующее:

1) функции $f_1, \dots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \dots, x_N$ равномерно сходящимся относительно z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \dots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \dots, x_N$;

[1] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

3) имеет место оценка $|h| < k_0|z|^b(\sum_{j=1}^{N}|x_j|)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Рассмотрим случай нескольких нулевых корней. Система вида (1.1) с матрицей P размерности $N \times N$, $N = k + n$, у которой собственные числа таковы, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0, \quad Re\lambda_{k+i} < 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

и нулевым корням отвечают простые элементарные делители, может быть приведена к виду

$$\begin{gathered} \dot{x}_s = \mu X_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \dot{y}_i = \sum p_{ji} y_i + \mu Y_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \dot{z} = r + \mu h(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ s = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь X_s, Y_j - голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z$, разложения которых при достаточно малых $|x_s|, |y_j|$ не содержат членов, линейных относительно величин $x_1, y_1, \ldots, y_n$; $(n \times n)$ - матрица $\{p_{ij}\}$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями; μ - малый параметр.

Пусть при $x_1 = \ldots = x_k = y_1 = \ldots = y_n = 0$ функции X_s, Y_j, h обращаются в нуль. Тогда система (1.3) будет иметь семейство равновесных решений $x_1 = \ldots = x_N = y_1 = \ldots = y_n = 0$, $z = z + rt$, представляющее собой прямую в $(k+n+1)$ - мерном пространстве. Задача состоит в изучении свойств этих решений.

Посмотрим, как ведут себя переменные x_s, y_j в качестве функции z.

Разделим первые $n + k$ уравнений системы (1.3) на последнее уравнение:

$$\begin{gathered} \tfrac{dx_s}{dz} = \mu \bar{X}_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z), \\ \tfrac{dy}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji} y_i + \mu \bar{\bar{V}}_j(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Собственные числа матрицы $\{\bar{p}_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n$, имеют отрицательные вещественные части относительно функций $\bar{X}_s, \bar{Y}_j$ мы будем предполагать, что они разлагаются в сходящиеся при достаточно малых $|x_s|$, $|y_j|$ ряды по целым положительным степеням x_s, y_j. Причем эти ряды сходятся равномерно по z.

С помощью замены, не нарушающей [2] устойчивости,

$$y_j = u_j + \eta_j,$$

где u_j - решение системы уравнений, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ji} u_i + \mu \bar{V}_j(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, z) = 0.$$

Систему (1.4) можно привести к виду

$$\begin{gathered} \tfrac{dX_s}{dz} = \mu \bar{X}_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z) = 0, \\ \tfrac{d\eta_j}{dz} = \sum_{i=1}^{n} p_{ji} \eta_i + \mu V(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta, \ldots, z) \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$V_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji} u + \mu \bar{\bar{V}}_j(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, z) -$$

$$- \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \bar{X}_i(x_1, \ldots, x_k, u_1 + \eta_1, \ldots, u_n + \eta_n, z).$$

Ясно, что при достаточно малых η_j функции V_j обладают свойствами функций $\bar{X}_s$, $\bar{Y}_s$.

Если $\bar{X}_s(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n, z) \equiv 0$, то у системы (1.4) имеется k не зависящих от z голоморфных интегралов

$$c_s = x_s + \varphi_s(x_1, \ldots, x_k, y_1 - \eta_1, \ldots, y_n - \eta_n), \quad s = 1, \ldots, k.$$

С помощью замены $x_s = c_s + f_s$, где f_s - решения системы

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial \eta_j} (\sum_{i=1}^{n} (p_{ji} + c_{ji})\eta_i + \mu V_j') = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{si}\eta_i + \mu u_s(f_1, \ldots, f_k, \eta_1, \ldots, \eta_n, c_1, \ldots, c_k),$$

в которую переходит система в частных производных [3]

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_s}{\partial \eta_j} \frac{\partial \eta_j}{\partial z} = \mu \bar{X}_s, \quad s = 1, \ldots, k,$$

где c_{ij}, γ_{si} - голоморфные по $c_1, \ldots, c_k$ функции, а c_s - достаточно малые произвольные постоянные, получим из второй группы уравнений (1.5)

$$\frac{d\eta_j}{dz} = \sum (p_{ji} + c_{ji})\eta_i + V_j'(c_1, \ldots, c_k, \eta_1, \ldots, \eta_n). \qquad (1.6)$$

Нулевое решение (1.6) асимптотически устойчиво по отношению к величинам $c_1, \ldots, c_k$. Так как функции f_s таковы, что

$$f_s \equiv 0 \quad \text{при} \quad \eta_1 = 0, \ldots, \eta_n = 0,$$

$$f_s \equiv 0 \quad \text{при} \quad c_1 = 0, \ldots, c_k = 0,$$

имеем

$$\eta_j(t, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) \to 0 \,\text{при}\, t \to \infty.$$

Следовательно, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Если* $X_s(x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_n, z) \equiv 0$, *то нулевое решение системы* (1.6) *устойчиво по Ляпунову относительно переменной* z. *При этом любое решение этой системы*

$$x_s = c_s, \quad y_j = u_j(c_1, \ldots, c_k), \quad s = 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, n,$$

условно асимптотически устойчиво.

Вернемся теперь к последнему уравнению системы (1.4)

$$\dot{Z} = Z + \mu h.$$

По сделанному выше предположению справелива оценка

$$h \le k_0 (\sum_{s=1}^{k} |X_s^0| + \sum_{j=1}^{n} |Y_j^0|)^a z^b,$$

где $k_0 > 0$.

При каких же условиях $z \to \infty$ при $t \to \infty$? Возможны случаи $b \leq 0$ и $b > 0$. При $b \leq 0$ можно сделать $|\mu h| < r/2$. Тогда $z \to \infty$ при $t \to \infty$. При $b > 0$ можно показать [4], что для любого конечного $\bar{z}$ найдется μ_0 такое, что для μ, не превосходящего по модулю μ_0 для любого $\varepsilon > 0$, любое движение, начинающееся в области $|x_s^0| < \delta$, $|y_j^0| < \delta$, будет оставаться в области $|x_s| < \varepsilon$, $|y_j| < \varepsilon$ при возрастании z от 0 до $\bar{z}$. Таким образом, справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.2. *Если при сделанной замене переменных функции $\bar{X}_s \equiv 0$, функции $\bar{Y}_j$ разлагаются в равномерно сходящиеся по z ряды относительно величин x_s, y_j, начиная со степеней этих величин не ниже второй, то при $b \leq 0$ равновесное решение системы* (1.4) *орбитально устойчиво.*

Теорема 1.3. *Если выполнены условия теоремы 1.2., но $b > 0$, то для любого конечного $\bar{z}$ за счет выбора x_s^0, y_j^0, μ величины $|x_s|$, $|y_j|$ будут оставаться малыми при возрастании от 0 до $\bar{z}$.*

2. Выводы

Результаты, полученные в настоящем параграфе, относятся к тому случаю, когда параметр μ мал. Но учитывая, что функция Ляпунова будет представлять собой ряд по степеням параметра, результаты будут оставаться верными и в том случае, когда функция Ляпунова существует (соответствующие ряды сходятся), отрицательна и $z \to \infty$ при $t \to \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. М. В. Стрекопытова, *Принципы управления движением заряженных частиц*, СПбГУ, СПб, 2003, 86 с.

2. А. В. Зубов, *Стабилизация и управление в динамических системах.*, СПбГУ, СПб, 2007, 132 с.

3. Л. Д. Блистанова, И. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

4. В. В. Дикусар, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, *Робастная устойчивость по части координат*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 234 с.

The orbital stability of equally measure solution

© **A.V. Zubov[4], O.S. Strecopitova[5], S.A. Strecopitov[6]**

Abstract. In giving article is learning theoretical bases of investigation motions systems, is not have limiting points. Is opening new region - going motions.

Key Words: own number, elementary divider, variable, stability, function, degree.

[4] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru