УДК 517.95

О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка

© **Т.К. Юлдашев**[1]

Аннотация. В данной работе изучается однозначная разрешимость смешанной задачи для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего суперпозицию параболического и гиперболического операторов в линейной части уравнения. С помощью метода разделения переменных получается счетная система нелинейных интегральных уравнений. Используется метод последовательных приближений. Доказывается сходимость полученных рядов.

Ключевые слова: смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение четвертого порядка, суперпозиция параболического и гиперболического операторов, метод разделения переменных, метод последовательных приближений.

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)u(\beta_j s,x)ds\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_1(x),\quad u_t(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_2(x),\quad u_{tt}(t,x)\mid_{t=0}=\varphi_3(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)\mid_{x=0}=u(t,x)\mid_{x=l}=u_{xx}(t,x)\mid_{x=0}=u_{xx}(t,x)\mid_{x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f(t,x,u,\vartheta)\in C(D\times R^2)$, $0<K_j(t,s)\in C(D_T^2)$, $0<\beta_j<1$, $j=\overline{1,m}$, $\varphi_i(x)\in C(D_l)$, $\varphi_i(x)\mid_{x=0}=\varphi_i(x)\mid_{x=l}=\varphi_i''(x)\mid_{x=0}=\varphi_i''(x)\mid_{x=l}=0$, $i=\overline{1,3}$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<l<\infty$, $0<T<\infty$.

Отметим, что смешанные и краевые задачи были рассмотрены в работах многих авторов, в частности, в [1]-[6]. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных более высоких порядков, в частности, уравнения четвертого порядка. Задачи геометрии и физики приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных. Изучение многих задач газовой динамики приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных более высоких порядков [7].

Решение смешанной задачи (1.1)-(1.3) разыскивается в виде ряда:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\cdot b_n(x),\quad (t,x)\in D. \tag{1.4}$$

Применение метода разделения переменных в виде (1.6) и использование интегрального тождества позволяет отказаться от непрерывной дифференцируемости правой части

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru.

уравнения (1.1). Кроме того, такой подход позволяет свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ).

Пусть $b_n(x)$ – собственные функции дифференциального оператора $-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$b_n(0) = b_n(l) = b_n''(0) = b_n''(l) = 0$$

и обладающие свойством $b_n''(x) = -\lambda_n^2 b_n(x)$, где λ_n^2 – соответствующие собственные значения данного оператора.

Линейное множество $\{a(t) = (a_n(t)) \mid a_n(t) \in C[0, T], n = 1, 2, \ldots\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_p(T)} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} |a_n(t)|^p\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p > 1$$

становится банаховым пространством $B_p(T)$.

Для каждого $a(t) \in B_p(T)$ определяется оператор

$$Qa(t) = u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \cdot b_n(x).$$

Через $E_p(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_p(T) \to E_p(D)$ и $E_p(D) \subset L_p(D)$.

Определение 1.1. *Если функция* $u(t, x) \in E_p(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству* $\int\limits_0^T \int\limits_0^l \left\{ u(t, y) \left[\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) - \dfrac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi \right] + f\Phi \right\} dydt = \int\limits_0^l \varphi_1 \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi \right]_{t=0} dy - \int\limits_0^l \varphi_2 \left[\dfrac{\partial}{\partial t}\Phi + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi \right]_{t=0} dy + \int\limits_0^l \varphi_3 [\Phi]_{t=0} dy$ *для любого* $\Phi(t, x) \in W_p^{(k)}(D)$, *то функция* $u(t, x)$ *называется обобщенным решением смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Коэффициенты разложения $a_n(t)$ обобщенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) удовлетворяют следующей ССНИУ:

$$a_n(t) = \Psi_n(t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\left(s, y, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s) \cdot b_\nu(y), \int\limits_0^s \sum_{j=1}^{m} K_j(s, \theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_j \theta) \cdot b_\nu(y) d\theta \right) \times$$
$$\times b_n(y) G_n(t, s) dyds, \quad t \in D_T, \tag{1.5}$$

где

$$\Psi_n(t) = \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} e^{-\lambda_n^2 t} + \frac{\lambda_n^4 \varphi_{1n} - \varphi_{3n}}{\lambda_n^2 + \lambda_n^4} \cos \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 \varphi_{1n} + (1 + \lambda_n^2)\varphi_{2n} + \varphi_{3n}}{\lambda_n^3 + \lambda_n^5} \sin \lambda_n t,$$

$$G_n(t, s) = \mu_n \left[e^{-\lambda_n^2 (t-s)} + \lambda_n \sin \lambda_n (t - s) - \cos \lambda_n (t - s) \right], \quad \mu_n = \frac{1}{\lambda_n^2 (1 + \lambda_n^2)}.$$

Действительно, если $\Phi = \Phi_m(t, x) = g(t) b_m(x) \in W_p^{(k)}(D)$, $0 \neq g(t) \in C^3(D_T)$, то из определения обобщенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) следует, что

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^l \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s) \cdot b_n(y) \left[-g'''(s) + \lambda_m^2 g''(s) - \lambda_m^2 g'(s) + \lambda_m^4 g(s) \right] - \right.$$
$$-f\left(s, y, \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(s) \cdot b_\nu(y), \int\limits_0^s \sum_{j=1}^{m} K_j(s, \theta) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\beta_j \theta) \cdot b_\nu(y) d\theta \right) \times \tag{1.6}$$
$$\left. \times g(s) b_m(y) \right\} dyds = 0.$$

Так как система функций $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована в $L_p(D_l)$, то интегрированием по частям из (1.6) можно получить, что

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T g(t)\left[a_n^{'''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{'}(t)+\lambda_m^4 a_n(t)-\right.\\ -\int\limits_0^l f\left(t,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j s)\cdot b_\nu(y)ds\right)\times\\ \left.\times b_n(y)dy\right]dt=0.\end{gathered}\tag{1.7}$$

Поскольку $g(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (1.7) следует

$$\begin{gathered}a_n^{'''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{''}(t)+\lambda_m^2 a_n^{'}(t)+\lambda_m^4 a_n(t)=\\ =\int\limits_0^l f\left(t,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(t)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j s)\cdot b_\nu(y)ds\right)b_n(y)dy.\end{gathered}\tag{1.8}$$

Система (1.8) решается методом вариации произвольных постоянных

$$\begin{gathered}a_n(t)=C_{1n}e^{-\lambda_n^2 t}+C_{2n}\cos\lambda_n t+C_{3n}\sin\lambda_n t+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(s)\cdot b_\nu(y),\int\limits_0^s\sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu(\beta_j\theta)\cdot b_\nu(y)d\theta\right)\times\\ \times b_n(y)G_n(t,s)dyds,\quad t\in D_T.\end{gathered}\tag{1.9}$$

Для определения коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,3})$ в (1.9) используются условия (1.2), т.е.

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\quad a_n^{'}(0)=\varphi_{2n},\quad a_n^{''}(0)=\varphi_{3n},$$

где $\varphi_{1n}=\int\limits_0^l\varphi_i(y)b_n(y)dy$, $i=\overline{1,3}$. Тогда из (1.9) следует ССНИУ (1.5).

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\int\limits_0^t\left\|f\left(t,x,Q\psi(t),\int\limits_0^t\sum_{j=1}^m K_j(t,s)Q\psi(\beta_j s)ds\right)\right\|_{L_p(D_l)}dt\leq\Delta<\infty;$

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\{F(t,x)_{|u,\vartheta}\}$, *где* $\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds<\infty;$

3. $\|\psi(t)\|_{B_p(T)}<\infty.$

Тогда ССНИУ (1.5) *имеет единственное решение в пространстве* $B_p(T)$. *Кроме того, имеет место оценка*

$$\begin{gathered}\|a^{k+1}(t)-a^k(t)\|_{B_p(T)}\leq\\ \leq\frac{\delta_1}{k!}\left[\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k exp\left\{\delta_2\int\limits_0^t\|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right\},\end{gathered}\tag{1.10}$$

где δ_1 *и* δ_2 *– некоторые положительные постоянные.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим итерационный процесс метода последовательных приближений

$$\left\{\begin{array}{l}a_n^0(t)=\psi_n(t),t\in D_T,\\ a_n^{k+1}(t)=\psi_n(t)+\\ +\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,Qa^k(s),\int\limits_0^s\sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^k(\beta_j\theta)d\theta\right)b_n(y)G_n(t,s)dyds,\\ k=0,1,2,3,\ldots,t\in D_T.\end{array}\right.\tag{1.11}$$

Согласно условиям теоремы для первой разности из (1.11) следует

$$\|a^1(t)-a^0(t)\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \int_0^t \int_0^l \left| f\left(s,y,Qa^0(s), \int_0^s \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^0(\beta_j\theta)d\theta\right)\right| \cdot |b_n(y)|\cdot|G_n(t,s)|dyds \leq$$
$$\leq M_1M_2 l^{\frac{1}{q}} \int_0^T \|f\|_{L_p(D_l)}dt \leq M_1M_2 l^{\frac{1}{q}}\Delta, \tag{1.12}$$

где $M_1=\|b(x)\|_{B_q(l)}$, $M_2=\|G(t,s)\|_{B_p(T)}$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Второе условие теоремы при учете (1.12) дает оценку для второй разности

$$\|a^2(t)-a^1(t)\|_{B_p(T)} \leq M_1^2M_2 \int_0^t\int_0^l F(s,y)\left(\|a^1(s)-a^0(s)\|_{B_p(T)}+\right.$$
$$\left.+\int_0^s \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)\|a^1(\beta_j\theta)-a^0(\beta_j\theta)\|_{B_p(T)}d\theta\right)dyds \leq$$
$$\leq \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^2 M_1^3\Delta\gamma_0 \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds, \tag{1.13}$$

где $\gamma_0 = 1+\max\limits_{(t,s)} \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(t,s)ds$.

Подобно (1.13) для любого натурального k справедлива оценка

$$\|a^{k+1}(t)-a^k(t)\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} \gamma_0^k M_1^{2k+1}\Delta \frac{\left[\int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k}{k!} \tag{1.14}$$

и далее, в силу (1.14)

$$\|a(t)-a^{k+1}(t)\|_{B_p(T)} \leq$$
$$\leq \left(M_2 l^{\frac{1}{q}}\right)^{k+1} \gamma_0^k M_1^{2k+1}\Delta \frac{\left[\int_0^t \|F(s,y)\|_{L_p(D_l)}ds\right]^k}{k!}+$$
$$+M_1^2M_2\gamma_0 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}\|a(s)-a^{k+1}(s)\|_{B_p(T)}ds. \tag{1.15}$$

Оценка (1.10) получается теперь применением к (1.15) неравенства Гронуолла-Беллмана. Существование решения ССНИУ (1.5) следует из оценки (1.14), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a(t)\in B_p(T)$. Предполагая, что ССНИУ (1.5) имеет два решения, для их разности $a(t)$ и $\vartheta(t)\in B_p(T)$ имеем оценку

$$\|a(t)-\vartheta(t)\|_{B_p(T)} \leq M_1^2M_2\gamma_0 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|F(s,x)\|_{L_p(D_l)}\|a(s)-\vartheta(s)\|_{B_p(T)}ds.$$

Из применения неравенства Гронуолла-Беллмана к последней оценке следует, что $\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_p(T)} = 0$, т.е. единственность решения ССНИУ (1.5) в пространстве $B_p(T)$.

Подстановка решения ССНИУ (1.5) в ряд (1.4) дает формальное решение смешанной задачи (1.1)-(1.3):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}[\psi_n(t) + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, Qa(s), \int_0^s \sum_{j=1}^m K_j(s,\theta)Qa^0(\beta_j\theta)d\theta\right) \times \\ \times b_n(y)G_n(t,s)dyds] \cdot b_n(y). \tag{1.16}$$

Теорема 1.2. *В условиях теоремы* (1.1.) *подстановка решения* $a(t) \in B_p(T)$ *ССНИУ* (1.5) *в* (1.16) *дает единственное обобщенное решение смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Доказательство. Для доказательства следует установить, что $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = 0$, где

$$P_k = \int_0^T \int_0^l \left\{u^k(t,y)[-\Phi_{ttt} - \Phi_{ttyy} - \Phi_{tyy} + \Phi_{yyyy}] - \right. \\ \left. -f\left(t, y, u^k(t,y), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s, y)ds\right)\Phi(t,y)\right\} dydt + \\ + \int_0^l \varphi_1^k\left[\Phi_{tt} + \Phi_{tyy} + \Phi_{yy}\right]_{t=0} dy - \int_0^l \varphi_2^k\left[\Phi_t + \Phi_{yy}\right]_{t=0} dy + \int_0^l \varphi_3^k\left[\Phi\right]_{t=0} dy. \tag{1.17}$$

Учет начальных условий $a_n(0) = \varphi_{1n}$, $a_n^{'}(0) = \varphi_{2n}$, $a_n^{''}(0) = \varphi_{3n}$ и условий теоремы при интегрировании по частям отдельных слагаемых в (1.17) дает

$$P_k = \int_0^l \left(\varphi_1(y) - \sum_{n=1}^k \varphi_{1n}b_n(y)\right)\left[\Phi_{tt} + \Phi_{tyy} + \Phi_{yy}\right]_{t=0} dy - \\ - \int_0^l \left(\varphi_2(y) - \sum_{n=1}^k \varphi_{2n}b_n(y)\right)\left[\Phi_t + \Phi_{yy}\right]_{t=0} dy + \int_0^l \left(\varphi_3(y) - \sum_{n=1}^k \varphi_{3n}b_n(y)\right)\left[\Phi\right]_{t=0} dy + \\ + \int_0^T \int_0^l \Phi(t,y)\sum_{n=1}^k \left\{\int_0^l f\left(t, y, u^k(t,y), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s, y)ds\right)b_n(y)dy - \right. \\ \left. -f\left(t, z, u^k(t,z), \int_0^t \sum_{j=1}^m K_j(t,s)u^k(\beta_j s, z)ds\right)\right\} \cdot b_n(y)dydt. \tag{1.18}$$

Поскольку $\varphi_i(x) \in L_p(D_l)$, первые три интеграла в (1.18) стремятся к нулю при $k \to \infty$. Сходимость разности двух последних интегралов (1.18) при $k \to \infty$ следует из условия теоремы, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = 0$,что и требовалось.

Список литературы

1. Гордезиани Д. Г., Авалашвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделир.*, **12**:1 (2000), 94–103.

2. Дмитриев В. Б., “Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения”, *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия*, 2006, №2(42), 15–27.

3. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

4. Пулькина Л. С., “Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения”, *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

5. Самарский А. А., “О некоторых проблемах теории диффренциальных уравнений”, *Дифференц. уравн.*, **16**:11 (1980), 1925–1935.

6. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Наука, М., 1988, 336 с.

7. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

On a mixed value problem for one nonlinear partial integro-differential equation of the fourth order.

© **T.K. Yuldashev**[2]

Abstract. In this article it is studied the solvability of one initial boundary value problem for a nonlinear partial integro-differential equation containing the superposition of parabolic and hyperbolic operators in the linear left-hand side of the equation. By the method of separation variables the countable system of nonlinear integral equation is obtained. The successive approximations method is used. Convergence of obtained series is proved.

Key Words: integro-differential equation of the fourth order, superposition of parabolic and hyperbolic operators, initial boundary value problem, separation variables, successive approximations methods.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk; tursunbay@rambler.ru.