

УДК 539.3: 533.5, 517.9

## Математическое моделирование систем динамического контроля за изменением давления

© П.А. Вельмисов,<sup>1</sup> Ю.В. Покладова,<sup>2</sup> Е.С. Серебрянникова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Рассматриваются математические модели механической системы, включающей в себя трубопровод с рабочей средой и датчик, составной частью которого является упругий элемент. Датчик предназначен для определения давления рабочей среды (например, на выходе из камеры сгорания двигателя), закон изменения которого считается заданным. Получены дифференциальные уравнения, описывающие колебания упругого элемента, и на их основе проведен численный эксперимент по исследованию его динамики.

**Ключевые слова:** трубопровод, датчик давления, деформация, упругий элемент, интегрированные дифференциальные уравнения, динамика.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 г.г. (ГК 14.740.12.0837).

### 1. Введение

Независимо от принципа преобразования все датчики давления в той или иной степени критичны к воздействию высоких температур и повышенных виброускорений. Размещение датчика давления непосредственно на корпусе двигателя принципиально обеспечивает более высокую достоверность измерения, но, как правило, сопровождается воздействием на него температур и виброускорений, что приводит к погрешности измерений, а в ряде случаев к разрушению упругого чувствительного элемента датчика. Причем во многих реальных случаях (например, при взлете и посадке аппарата) воздействие имеет нестационарный характер. В связи с вышеизложенным, возникает задача проектирования механической системы «трубопровод - датчик давления». В такой системе датчик расположен на некотором расстоянии от двигателя и соединен с ним с помощью трубопровода, что позволяет ослабить воздействие температур и виброускорений. Задача состоит в получении уравнений, связывающих закон изменения рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого элемента датчика, и предназначенных по величине деформации элемента рассчитать давление в двигателе. Математические модели системы «трубопровод - датчик давления» рассматривались в [1] – [8]. Исследовались как линейные модели (движение рабочей среды, а также динамика чувствительного элемента датчика описываются линейными уравнениями), так и нелинейные (динамика элемента описывается нелинейными уравнениями). В данной статье предложена новая нелинейная модель системы «трубопровод - датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика.

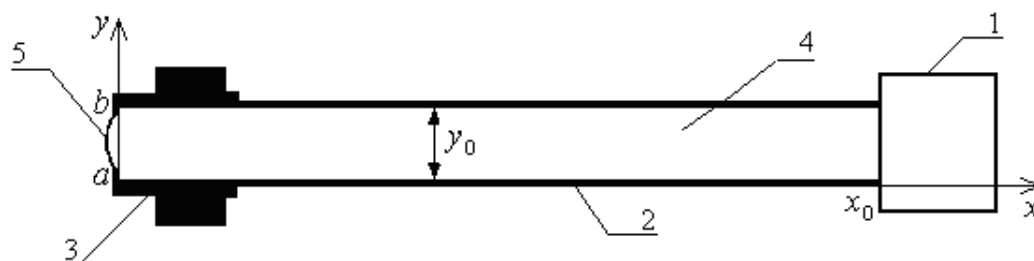
<sup>1</sup> Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

<sup>2</sup> Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

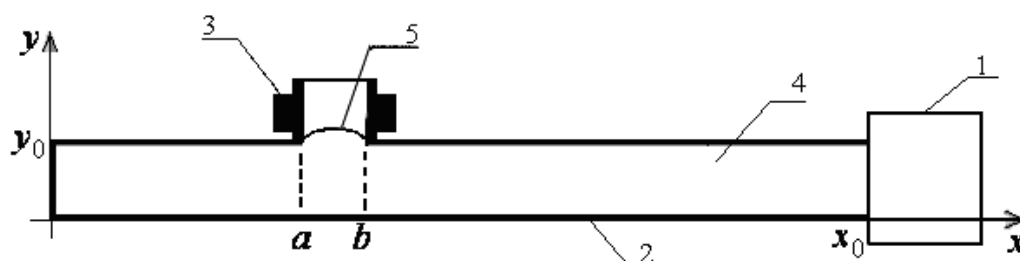
<sup>3</sup> Старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск

## 2. Линейные модели системы «трубопровод - датчик давления»

Рассматриваются плоские модели механической системы «трубопровод - датчик давления» для трубопровода конечной длины (рис.2.1,2.2) и бесконечно длинного трубопровода (рис.2.3,2.4) с датчиком, закрепленным на торцевой и на боковой стенках, а также бесконечно длинного трубопровода с датчиком, расположенным на стенке полости трубопровода (рис.2.5).

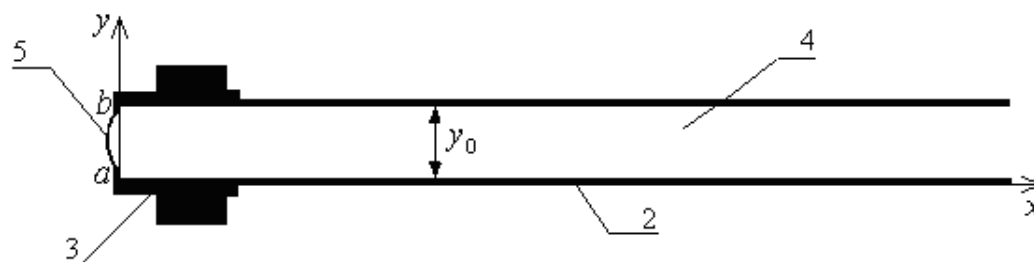


Р и с у н о к 2.1

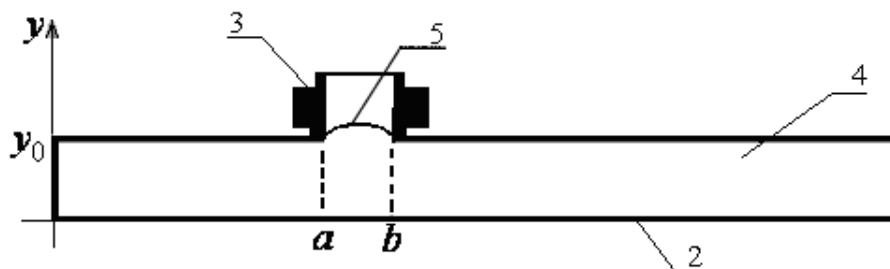


Р и с у н о к 2.2

На рис.2.1, 2.2 изображена схема системы для трубопровода конечной длины с упругим элементом на торцевой (2.1) и боковой (2.2) стенках.

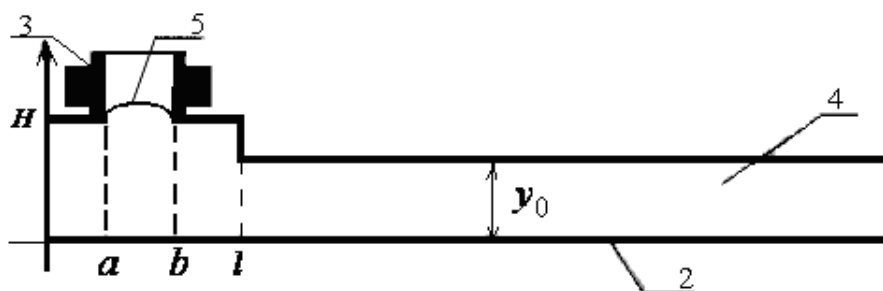


Р и с у н о к 2.3



Р и с у н о к 2.4

На рис.2.3, 2.4 представлена схема системы для бесконечно длинного трубопровода с упругим элементом на торцевой (рис. 2.3) и боковой (рис. 2.4) стенках.



Р и с у н о к 2.5

Для модели, геометрическая схема которой изображена на рис.2.5, датчик расположен на стенке полости бесконечно длинного трубопровода.

На рис. 2.1-2.5: 1 - двигатель, 2 - трубопровод, 3 - датчик, 4 - рабочая среда, 5 - пластина (упругий элемент датчика).

Рассмотрим задачу о динамике упругого элемента (упругой пластины) датчика давления рабочей среды, расположенного на торцевой стенке трубопровода конечной длины (рис.2.1).

Предлагаемая математическая модель определяется следующими уравнениями и граничными условиями:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0); \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (a, b), \quad 0 < a < b < y_0; \quad (2.3)$$

$$\varphi_x(0, y, t) = 0, \quad y \in (0, a) \cup (b, y_0); \quad (2.4)$$

$$\tilde{P} - \rho\varphi_t(x_0, y, t) = P_*(y, t), \quad y \in (0, y_0); \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), \quad y \in (a, b). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь (2.1) - уравнение Лапласа, описывающее движение рабочей среды в трубопроводе; (2.2)-(2.4) - условия непротекания; условие (2.5) задает закон изменения давления на входе в трубопровод; (2.6) - уравнение динамики элемента;  $\varphi(x, y, t)$  - потенциал скорости среды;  $w(y, t)$  - прогиб упругого элемента;  $x_0, y_0$  - продольный и поперечный размеры трубопровода;  $a, b$  - координаты концов упругого элемента;  $\tilde{P}$  - давление рабочей среды

в трубопроводе в состоянии покоя;  $\rho$  - плотность среды;  $M$  - погонная масса;  $D$  - изгибная жесткость;  $N$  - сжимающее (растягивающее) усилие;  $\alpha, \beta$  - коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\delta$  - коэффициент, учитывающий инерцию вращения; точка и штрих, также как и индексы  $t$  и  $y$  снизу, обозначают частные производные по  $t$  и  $y$  соответственно;  $P_*(y, t)$  - закон распределения давления среды в сечении  $x = x_0$  (на выходе из двигателя);  $P_0(y, t)$  - распределенная внешняя нагрузка, действующая на элемент.

Математическая модель (2.1)-(2.6) рассматривалась в [1] - [5]. На основе метода Фурье задача сводилась к исследованию уравнения для функции деформации упругого элемента. Уравнение, связывающее закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод (на выходе из двигателя) и функцию прогиба упругого элемента датчика давления имеет вид:

$$L(w) = P_0(y, t) - \frac{\rho x_0}{y_0} \int_a^b \ddot{w}(y, t) dy - \frac{1}{y_0} \int_0^{y_0} P_*(y, t) dy - \left[ -\frac{2\rho}{y_0} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(\lambda_s y)}{ch(\lambda_s x_0)} \left[ \int_0^{y_0} \frac{P_*(y, t)}{\rho} \cos(\lambda_s y) dy + \frac{sh(\lambda_s x_0)}{\lambda_s} \int_a^b \ddot{w}(y, t) \cos(\lambda_s y) dy \right] \right], \quad (2.7)$$

где оператор  $L(w)$  определяется, согласно (2.6), выражением

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}''. \quad (2.8)$$

В случае бесконечно длинного трубопровода (рис.2.3-2.5) на основе методов теории функций комплексного переменного (с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца, формул Шварца и Сохоцкого) получено уравнение, связывающее закон изменения давления  $P(t)$  на входе в трубопровод и деформацию  $w$  упругого элемента датчика. Например, для модели, изображенной на рис.2.4, имеем:

$$L(w) = P_*(t) - P_0(x, t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(s, t) \ln \left| ch \frac{\pi s}{y_0} - ch \frac{\pi x}{y_0} \right| ds, \quad (2.9)$$

а для модели, изображенной на рис.2.5 -

$$L(w) = P(t) - P_0(x, t) + \frac{\rho}{\pi} \int_a^b \ddot{w}(\tau, t) \ln \left| \frac{\xi(\tau) - n}{\xi(\tau) - \xi(x)} \right| d\tau, \quad x \in (a, b), \quad (2.10)$$

где  $\xi(x)$  - функция, обратная к функции  $x(\xi) = C_0 \int_0^\xi \sqrt{\frac{m-s}{s(1-s)}} \frac{ds}{n-s}$ ,  $\xi \in [0, 1]$ . Концы интервала  $(\alpha, \beta)$  определяются из условий:  $x(\alpha) = a$ ,  $x(\beta) = b$ . Параметры  $C_0, m, n$  выражаются через параметры  $l, y_0, H$  [6].

### 3. Нелинейные модели системы «трубопровод - датчик давления»

Постановка задачи (2.1)-(2.6) соответствует линейной теории аэрогидроупругости, когда динамика жидкости (газа), а также динамика чувствительного элемента датчика, описываются линейными уравнениями.

Авторами была предложена ранее в [7] также нелинейная модель, которая определяется приведенными выше уравнениями (2.1)-(2.6), при этом в уравнении (2.6), описывающем динамику пластины, дифференциальный оператор  $L(w)$  заменяется следующим:

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + \left( \frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}} \right)'' + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' \quad (3.1)$$

В предположении, что  $w'$  мало, производилась замена  $\frac{1}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}$  на  $[1 - \frac{3}{2}(w')^2]$ . В результате выражение для  $L(w)$  принимало вид

$$L(w) \equiv M\ddot{w} + Dw'''' - \frac{3}{2}Dw''''(w')^2 - 9Dw''''w''' - 3D(w'')^3 + Nw'' + \alpha\dot{w}'''' + \beta\dot{w} - \delta\ddot{w}'' \quad (3.2)$$

В данной статье предлагается новая нелинейная модель системы «трубопровод - датчик давления», учитывающая как поперечную, так и продольную деформации упругого элемента датчика. Уравнение (2.6), описывающее динамику пластины, заменяется системой двух уравнений:

$$\begin{cases} -EF [u' + \frac{1}{2}(w')^2]' + M\ddot{u} + \alpha_*\dot{u}'' = 0, \\ -EF [w'(u' + \frac{1}{2}(w')^2)]' + \left( \frac{Dw''}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}} \right)'' + M\ddot{w} + \alpha\dot{w}'''' - \delta\ddot{w}'' + \beta\dot{w} + Nw'' = \\ = P_0(y, t) - \tilde{P} + \rho\varphi_t(0, y, t), y \in (a, b). \end{cases} \quad (3.3)$$

Правая часть второго уравнения системы (3.3) имеет такой же вид, как и правые части уравнений (2.7), (2.9), (2.10) в зависимости от выбранной модели. Здесь  $u(y, t)$ ,  $w(y, t)$  - продольная и поперечная деформации упругого элемента в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $E$  - модуль упругости;  $F$  - площадь поперечного сечения. В предположении, что  $w'$  мало, производилась замена  $\frac{1}{[1+(w')^2]^{\frac{3}{2}}}$  на  $[1 - \frac{3}{2}(w')^2]$ .

#### 4. Решение уравнения для деформации

Для линейных и нелинейных моделей, геометрические схемы которых изображены на рис.2.1-2.5, решение уравнения для деформации строится с помощью метода Галеркина.

Для линейной математической модели (2.1)-(2.6) и нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.2) решение  $w(y, t)$  уравнения (2.7) представляется в виде  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t)g_k(y)$ , где  $\{g_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$  - полная на  $[a, b]$  система базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Например, в случае жесткого защемления концов пластины ( $w = 0, w' = 0$  при  $y = a, y = b$ ) решение уравнения отыскивается в виде  $w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t)\psi_k(y)$ , где

$$\begin{aligned} \psi_k(y) = & ch(\mu_k(y-a)) - \cos(\mu_k(y-a)) - \\ & - \frac{ch(\mu_k(b-a)) - \cos(\mu_k(b-a))}{sh(\mu_k(b-a)) - \sin(\mu_k(b-a))} (sh(\mu_k(y-a)) - \sin(\mu_k(y-a))), \end{aligned}$$

при этом  $\mu_k$  находятся из уравнения  $ch(\mu_k(y - a)) \cdot \cos(\mu_k(y - a)) = 1$  ( $k = 1, \dots, n$ ).  
 Функции  $\{\psi_k(y)\}_{k=1}^\infty$  ортогональны на  $[a, b]$ , т.е.  $\int_a^b \psi_i(y)\psi_j(y)dy = 0$  при  $i \neq j$ . Можно  
 показать, что  $\int_a^b \psi_i^2(y)dy = b - a$ .

Для шарнирного закрепления концов пластины ( $w = 0, w'' = 0$  при  $y = a, y = b$ ) можно положить

$$w(y, t) = \sum_{k=1}^m w_k(t) \sin \beta_k(y - a),$$

где  $\beta_k = \frac{\pi k}{b-a}$ .

Из условия ортогональности невязки уравнения (2.7) к системе базисных функций  $\{g_k(y)\}_{k=1}^n$  получим систему из  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $w_k(t)$ .

Для нелинейной модели, учитывающей как продольную, так и поперечную деформации, согласно методу Галеркина, искомые функции деформации  $u(y, t), w(y, t)$  ищем в виде  $u(y, t) = \sum_{k=1}^n u_k(t)h_k(y), w(y, t) = \sum_{k=1}^n w_k(t)g_k(y)$ , где  $\{h_k(y)\}_{k=1}^\infty, \{g_k(y)\}_{k=1}^\infty$  - полные на  $[a, b]$  системы базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям, соответствующим условиям закрепления пластины.

Из условия ортогональности невязок первого и второго уравнений (3.3) к системам базисных функций  $\{h_k(y)\}_{k=1}^\infty, \{g_k(y)\}_{k=1}^\infty$  соответственно, получим систему из  $2n$  обыкновенных дифференциальных уравнений для  $u_k(t), w_k(t)$ .

Например, для  $n = 2$  в случае шарнирного закрепления концов пластины и  $a = 0, b = y_0, h_k(y) = \sin \beta_k(y - a), g_k(y) = \sin \beta_k(y - a)$  система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

1. Линейная модель (2.1)-(2.6)

$$\begin{cases} A_1 \ddot{w}_1(t) + B_1 \dot{w}_1(t) + C_1 w_1(t) = F_1(t), \\ A_2 \ddot{w}_2(t) + B_2 \dot{w}_2(t) + C_2 w_2(t) = F_2(t) \end{cases}$$

2. Нелинейная модель (2.1)-(2.5), (3.2)

$$\begin{cases} N_1 \ddot{w}_1(t) + M_1 \dot{w}_1(t) + D_1 w_1(t) + G_1 w_1^3(t) + H_1 w_1(t)w_2^2(t) = P_1(t), \\ N_2 \ddot{w}_2(t) + M_2 \dot{w}_2(t) + D_2 w_2(t) + G_2 w_2^3(t) + H_2 w_2(t)w_1^2(t) = P_2(t). \end{cases}$$

3. Нелинейная модель (2.1)-(2.5), (3.3)

$$\begin{cases} a_{11} \ddot{u}_1 + a_{12} \dot{u}_1 + a_{13} u_1 + a_{14} w_1 w_2 = 0, \\ a_{21} \ddot{u}_2 + a_{22} \dot{u}_2 + a_{23} u_2 + a_{24} w_1^2 = 0, \\ a_{31} \ddot{w}_1 + a_{32} \dot{w}_1 + a_{33} w_1 + a_{34} w_1^3 + a_{35} w_1 w_2^2 + a_{36} u_1 w_2 + a_{37} w_1 u_2 = f_1(t), \\ a_{41} \ddot{w}_2 + a_{42} \dot{w}_2 + a_{43} w_2 + a_{44} w_2^3 + a_{45} w_2 w_1^2 + a_{46} u_1 w_2 = 0. \end{cases}$$

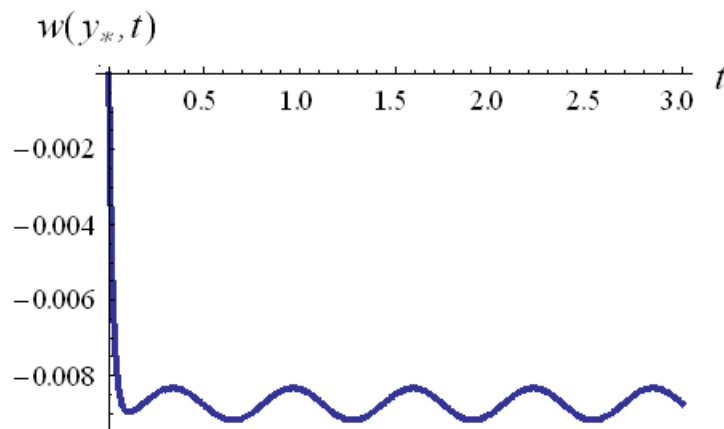
Коэффициенты  $A_1, B_1, \dots, N_1, M_1, \dots, a_{11}, a_{12}, \dots$  выражаются через параметры задачи.

## 5. Численное моделирование

Для всех рассмотренных моделей задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых в результате процедуры ортогонализации, решается с помощью системы Mathematica. Проведено численное моделирование на ЭВМ динамики упругого элемента датчика в зависимости от закона изменения давления в двигателе. Исследовалась деформация элемента как функция времени (в фиксированных точках элемента) и как функция координаты (в фиксированные моменты времени) для различных параметров механической системы.

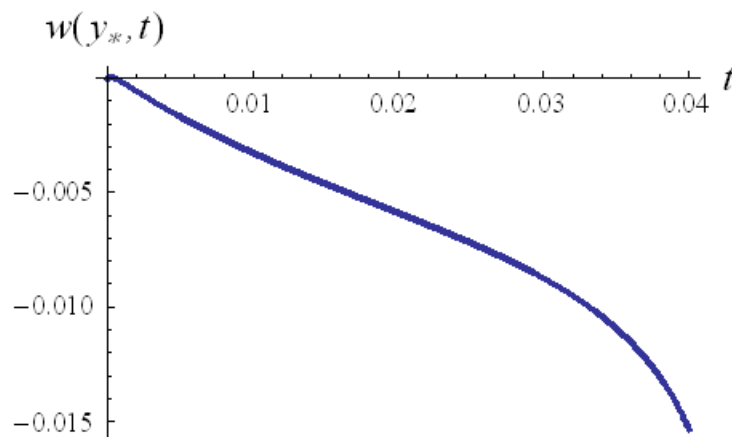
**Пример 5.1.** Рассмотрим модель, изображенную на рис. 2.1, в случае шарнирного закрепления концов упругого элемента. Рабочая среда - вода ( $\rho_0 = 10^3$ ), пластина изготовлена из стали ( $E = 2 \cdot 10^{11}$ ,  $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$ ,  $h = 3 \cdot 10^{-4}$ ).

Для значений параметров (все значения приведены в системе СИ)  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 0,02$ ,  $a = 0$ ,  $b = y_0$ ,  $M = 2,34$ ,  $D = 0,495$ ,  $N = 10^3$ ,  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,3$ ,  $\delta = 0$ ,  $w(y,0) = 0$ ,  $\dot{w}(y,0) = 0,5$ ,  $P_0(x,t) = 0$ ,  $P_0(y,t) = 10^5(20 + \cos(10t))$  получено решение для функции  $w(y,t)$  в точке  $y_* = \frac{a+b}{2,5}$  (рис.5.1):



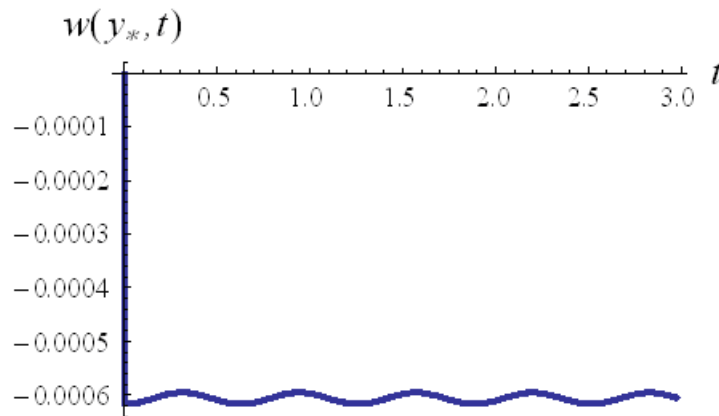
Р и с у н о к 5.1

График деформации  $w(y,t)$  для линейной модели (2.1)-(2.6).



Р и с у н о к 5.2

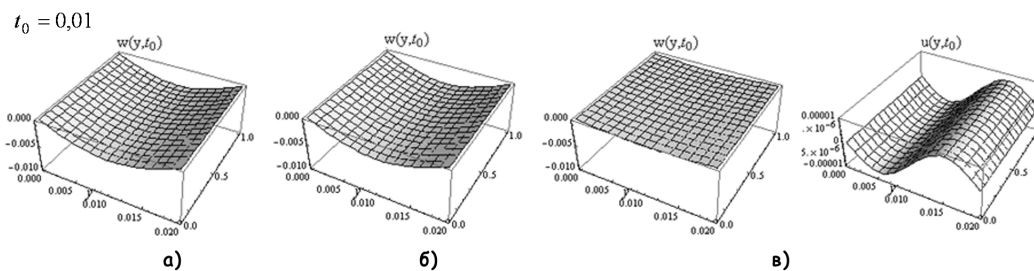
График деформации  $w(y,t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.2).



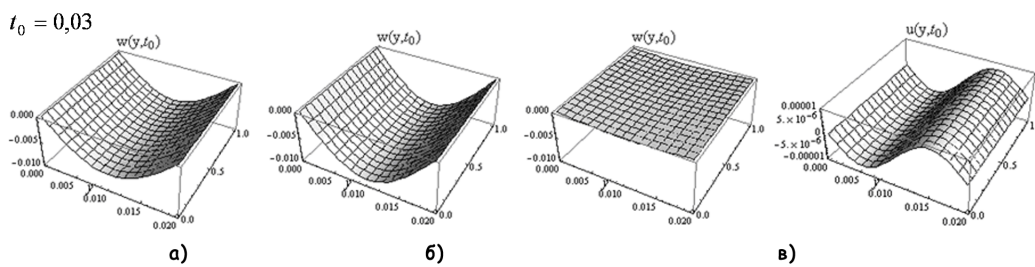
Р и с у н о к 5.3

График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.3).

Прогибы упругого элемента в фиксированные моменты времени  $t = t_0$  для линейной и нелинейных моделей представлены на рис.5.4,5.5.



Р и с у н о к 5.4

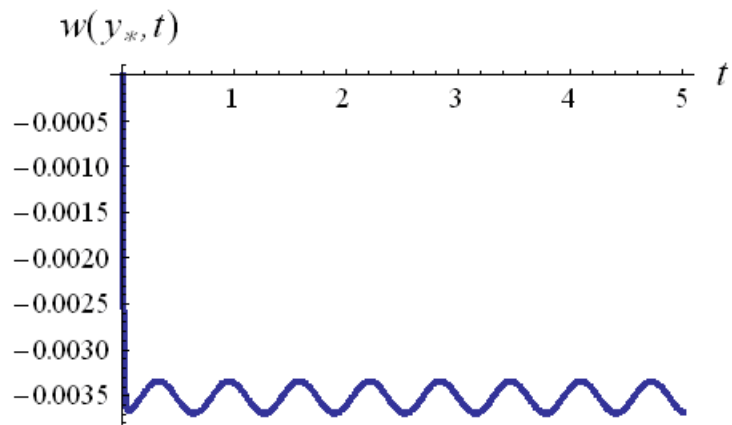


Р и с у н о к 5.5

Рис. 5.4, 5.5. Графики деформации  $w(y, t_0)$  для а)линейной (2.1)-(2.6), б)нелинейной (2.1)-(2.5),(3.2) и в)нелинейной (2.1)-(2.5), (3.3) в фиксированные моменты времени  $t_0$ .

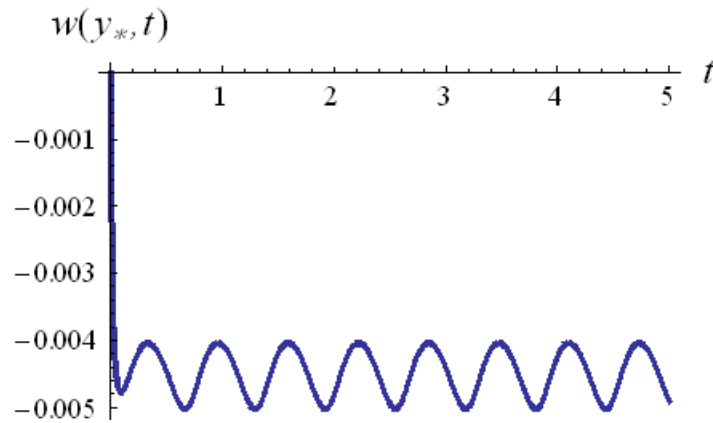
Для указанных выше значений параметров, увеличим толщину пластинки  $h = 4 \cdot 10^{-4}$  ( $M = 3, 12 ; D = 1, 172 ; EF = 8 \cdot 10^7$ ).





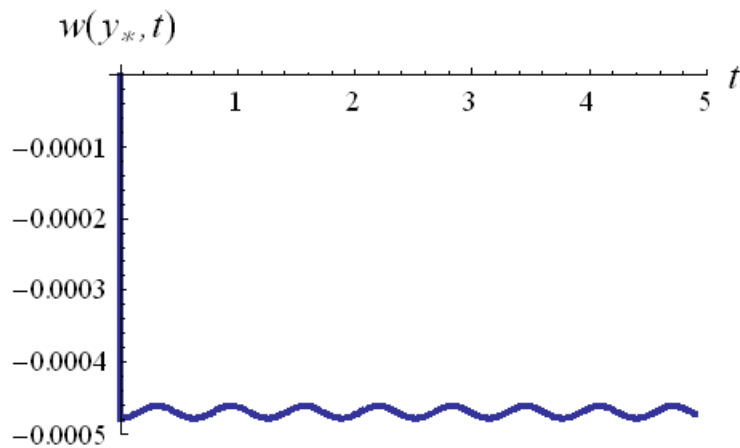
Р и с у н о к 5.6

График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели (2.1)-(2.6).



Р и с у н о к 5.7

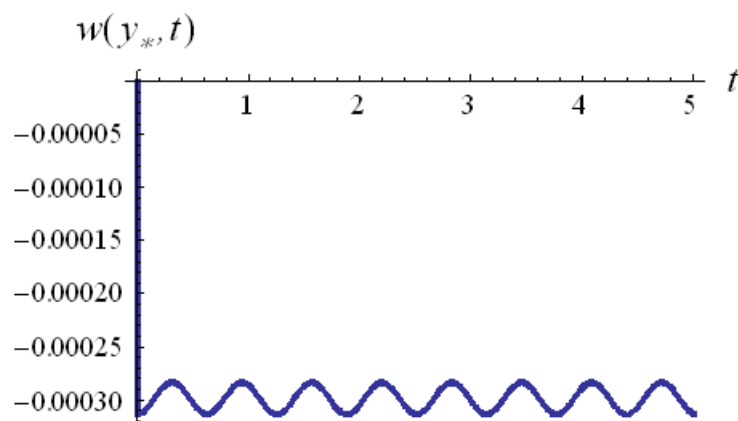
График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.2).



Р и с у н о к 5.8

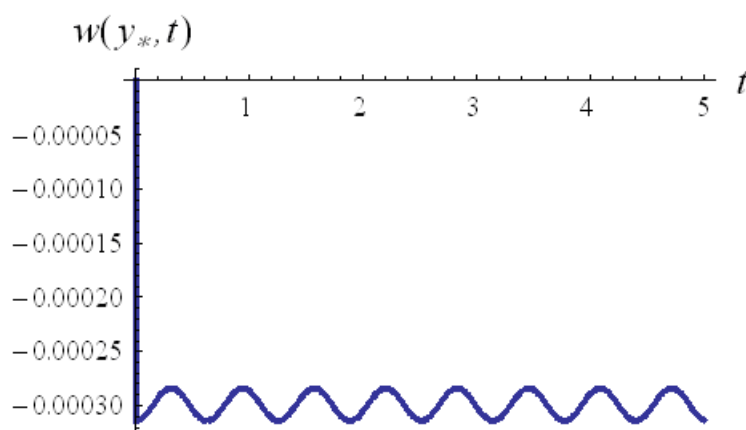
График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.3).

Для  $h = 9 \cdot 10^{-4}$  ( $M = 7,02$ ;  $D = 3,365$ ;  $EF = 18 \cdot 10^7$ ) получим графики деформации  $w(y_*, t)$ .



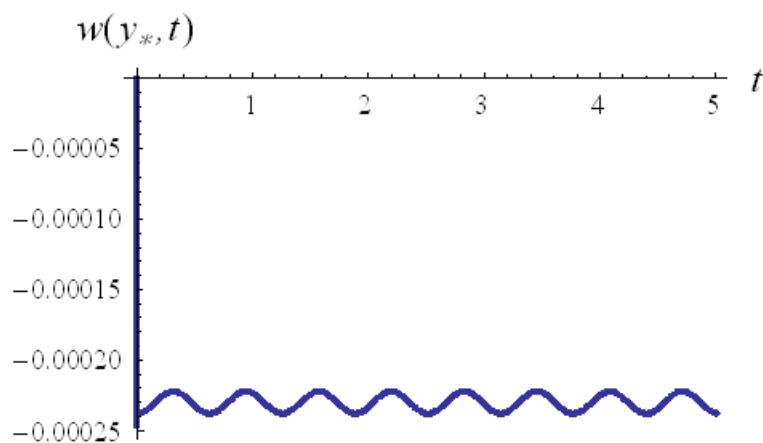
Р и с у н о к 5.9

График деформации  $w(y, t)$  для линейной модели (2.1)-(2.6).



Р и с у н о к 5.10

График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.2).



Р и с у н о к 5.11

График деформации  $w(y, t)$  для нелинейной модели (2.1)-(2.5), (3.3).

Сравнивая графики 5.1-5.11 можно сделать вывод, что при увеличении толщины пластинки происходит уменьшение деформации упругого элемента, что соответствует физическим представлениям. Численный эксперимент показал также, что для одинаковых значений параметров системы графики деформаций пластины для нелинейных и линейной моделей существенно отличаются, откуда следует вывод, что учет нелинейных членов в уравнении, описывающем динамику пластины, имеет важное значение при исследовании динамики чувствительного элемента.

## 6. Заключение

Развитие авиационной, космической и другой техники требует постоянного совершенствования и разработки новых типов первичных преобразователей, в частности, датчиков давления. В связи с этим, возникает актуальная задача разработки специальных методов исследования динамики и устойчивости упругих элементов датчиков давления, взаимодействующих с жидкостью. Предложенные авторами новые модели механической системы «трубопровод - датчик давления», методика решения соответствующих задач аэрогидроупругости позволяют дополнить базу современного проектирования датчиков давления и усовершенствовать ее.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., «Математические модели механической системы «трубопровод - датчик давления»», *Вестник Саратовского государственного технического университета*, 2007, №3, 7–14.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Покладова Ю.В., *Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления»*, УлГТУ, Ульяновск, 2008, 188 с.
3. Вельмисов П.А., Горбоконенко В.Д., Решетников Ю.А., «Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления»», *Датчики и системы*, 2003, №6(49), 12–15.
4. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., «Математические модели одной гидроупругой системы», *Труды Средневолжского математического общества*, 8:2 (2006), 93–98.
5. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., «О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод-датчик давления»», *Вестник Самарского государственного технического университета*, 2011, №1(29), 137–144.
6. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., «О некоторых математических моделях механической системы «трубопровод-датчик давления»», *Proceeding of the international conference «Education, science and economics at universities. Integration to international education area»*, NOVUM, Plock, 2010, 492–499.
7. Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Серебрянникова Е.С., «Математическое моделирование системы «трубопровод-датчик давления»», *Труды Средневолжского математического общества*, 12:4 (2010), 85–93.

- 
8. Velmisov P.A, Pokladova Yu.V., “Mathematical models of a mechanical system «Pipeline - Pressure Sensor»”, *Application of Mathematics in Engineering and Economics*, Bulgaria, Sofia, 2004, 84–89.

## An investigation of dynamic of an elastic element of a pressure sensor.

© P.A. Velmisov,<sup>4</sup> Yu.V. Pokladova,<sup>5</sup> E. S. Serebryannikova<sup>6</sup>

**Abstract.** Mathematical models of mechanical system, including a pipeline with the work-area and a sensor with an elastic element as a part, are considered. The sensor is used for pressure definition of the work-area, whose law of change is considered set. The differential equations, describing fluctuations of an elastic element make a base for the numerical experiment on research of dynamics of the element.

**Key Words:** elastic element, pressure sensor, pipeline, deformation, integro-differential equations, dynamics.

---

<sup>4</sup> Professor, Head of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, velmisov@ulstu.ru

<sup>5</sup> Docent of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, pokladovau@inbox.ru

<sup>6</sup> Teacher of High Mathematic Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk