УДК 534.113

К доказательству единственности решения обратной задачи по изгибным колебаниям трубы с протекающей жидкостью

© **Г.Ф. Сафина**[1]

Аннотация. В работе рассмотрены прямая задача по определению частот изгибных колебаний узкой трубы с несжимаемой жидкостью и обратная задача диагностирования параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью по собственным частотам ее изгибных колебаний. Доказаны теоремы о единственности определения параметров упругих закреплений трубы в случае протекания по ней жидкости. Установлено, что в случае протекания жидкости по трубопроводу необходимо использование из спектра частот колебаний 14 значений для определения параметров упругих закреплений трубы. Разработаны методы восстановления четырех краевых условий обратной задачи. Приведены примеры.

Ключевые слова: труба с протекающей жидкостью, частоты колебаний, краевые условия, параметры упругих закреплений, задача диагностирования, единственность решения

1. Введение

Решения прямой и обратной задач по изгибным колебаниям трубы с протекающей жидкостью продолжают исследования в виброакустической диагностике механических систем [1]–[3].

Задачи вычисления собственных частот изгибных колебаний трубопровода исследовалось в работах [4], [5]. Однако, обратная задача — задача отыскания краевых условий по собственным частотам — в этих работах не изучалась. К тому же, в этих работах рассматривались лишь приближенные методы (например, методы Галеркина и Рэлея-Ритца), которые не применимы для решение поставленной здесь задачи.

Ранее в работах [6]–[10] изучались обратные спектральные задачи диагностирования закреплений струн, мембран, стержней, пластин, валов, полых труб и труб с непротекающей жидкостью по собственным частотам их колебаний. Целью же настоящей работы является доказательство единственности решения обратной задачи диагностирования параметров закреплений трубы в случае протекания по ней жидкости. К тому же, в отличие от работ [6]–[10], в настоящей работе отыскиваются не два краевых условия, а все четыре. Это существенно осложняет задачу отыскания краевых условий и требует иных методов ее решения.

2. Прямая задача определения частот колебаний трубы с жидкостью

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях узкой трубы с несжимаемой жидкостью и приведем некоторые известные результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

[1] Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

Уравнение малых свободных колебаний трубопровода с протекающей по нему жидкостью (с учетом несжимаемости жидкости) имеет следующий вид [4], [5]):

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \widetilde{m})\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\widetilde{m}V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \widetilde{m}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad m = \pi\,(r^2 - r_1^2\,)\rho, \quad \widetilde{m} = \pi\, r_1^2\,\rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и $\widetilde{m}$ — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки в виде [4] $w = \partial^2 w/\partial x^2 = 0$, принято в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s\,\sin\,\frac{s\,\pi}{l}\,x\,e^{i\,\omega\,t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина [4]. Частотное уравнение представлено в виде бесконечного определителя, из которого находятся приближенные значения собственных частот колебаний трубы с жидкостью. Например, уточненное значение частоты ω_1 можно получить, приравнивая к нулю определитель второго порядка в верхнем левом углу бесконечного определителя. Следующее приближение для ω_1 можно получить, рассматривая определитель третьего порядка и т.д.

Рассмотрим другой подход к решению данной задачи [8]. Введем безразмерные переменные

$$\widetilde{x} = x/l, \quad \widetilde{w} = w/r, \quad \widetilde{t} = t/\tau,$$

где

$$\tau = l^2\sqrt{\frac{m+\widetilde{m}}{EI}}.$$

Положим выражение для прогиба в виде:

$$\widetilde{w}(\widetilde{x},\widetilde{t}) = X(\widetilde{x})\,e^{i\,\omega\,\widetilde{t}}$$

и преобразуем уравнение (2.1) к линейному дифференциальному уравнению

$$X^{(4)} + a\,X'' + 2b\,i\,\omega X' - \omega^2\,X = 0, \tag{2.2}$$

в котором $X = X(\widetilde{x})$ и коэффициенты уравнения выражаются следующим образом:

$$a = \frac{\widetilde{m}\,l^2}{E\,I}\left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2\right); \quad b = \frac{\widetilde{m}\,V_0\,l}{(E\,I\,(m+\widetilde{m}))^{1/2}}. \tag{2.3}$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.2) являются функции

$$X_j = X_j(\widetilde{x},\omega) = e^{\lambda_j \widetilde{x}}, \qquad j = 1,2,3,4,$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — различные корни соответствующего характеристического уравнения.

Для постановки прямой спектральной задачи краевые условия, учитывающие заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку, различные виды упругого закрепления, рассмотрим в виде [11]:

$$\begin{aligned} U_1(X) = a_1\, X(0) + a_4\, X'''(0) = 0, \\ U_2(X) = a_2\, X'(0) + a_3\, X''(0) = 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} U_3(X) = b_1\, X(l) + b_4\, X'''(l) = 0, \\ U_4(X) = b_2\, X'(l) + b_3\, X''(l) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

В рассмотренных обозначениях прямая задача формулируется следующим образом: известны линейные формы $U_1(X)$, $U_2(X)$, $U_3(X)$, $U_4(X)$ краевых условий задачи (2.2), (2.4), (2.5), требуется найти неизвестные собственные частоты ω_k колебаний трубы с жидкостью.

Уравнение частот, необходимое для решения прямой задачи, получаем из условия равенства нулю характеристического определителя [11] $\Delta(\omega) = 0$. (Некоторые приближенные методы вычисления корней характеристического определителя изложены в [12]).

3. Обратная задача по диагностированию параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью

Поставим теперь обратную спектральную задачу – задачу диагностирования параметров закреплений трубы с жидкостью по собственным частотам ее колебаний.

Для математической постановки обратной задачи введем следующие обозначения. Матрицу, составленную из коэффициентов a_j форм $U_1(X_k)$ и $U_2(X_k)$, обозначим через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_j форм $U_3(X_k)$ и $U_4(X_k)$, через B:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Миноры второго порядка, образованные из i-го и j-го столбцов матриц A и B, будем для краткости обозначать через A_{ij} и B_{ij}.

Заметим, что отыскание краевых условий не означает восстановление всех коэффициентов a_j и b_j, поскольку, например, краевые условия $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$ и $X(0) - X'(0) = 0$, $X(0) + X'(0) = 0$ эквивалентны, а их соответствующие коэффициенты a_j различны.

Поэтому нашей задачей не является точное распознавание всех коэффициентов a_j и b_j. Цель — отыскание краевых условий, что равносильно нахождению линейных оболочек $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$, построенных на векторах

$$\mathbf{a}_1 = (a_1,\, 0,\, 0,\, a_4)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{a}_2 = (0,\, a_2,\, a_3,\, 0)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{b}_1 = (b_1,\, 0,\, 0,\, b_4)^{\mathrm{T}}, \;\; \mathbf{b}_2 = (0,\, b_2,\, b_3,\, 0)^{\mathrm{T}}.$$

В терминах задачи (2.2) – (2.5) обратная задача восстановления краевых условий (2.4), (2.5) может быть сформулирована следующим образом:

Обратная задача. *Коэффициенты a_j и b_j форм $U_i(X_m)$ $(i, j, m = = 1, 2, 3, 4)$ задачи (2.2)–(2.5) неизвестны. Ранги матриц A и B, составленных из этих коэффициентов, равны двум. Известны собственные значения ω_k задачи (2.2)–(2.5). Требуется восстановить линейные оболочки $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ и $\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle$.*

4. Единственность решения обратной задачи в случае протекания жидкости по трубе

Для дальнейшего изложения введем в рассмотрение новые обозначения.

Обозначим через C следующую матрицу порядка 4×8, составленную из нулевых матриц 0, а также матриц A и B

$$C = \left\| \begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & B \end{array} \right\| \qquad (4.1)$$

Элементы матрицы C обозначим через c_{ij}, а миноры матрицы C, образованные из столбцов с номерами $k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4$ — через

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = \begin{vmatrix} c_{1\,k_1} & c_{1\,k_2} & c_{1\,k_3} & c_{1\,k_4} \\ c_{2\,k_1} & c_{2\,k_2} & c_{2\,k_3} & c_{2\,k_4} \\ c_{3\,k_1} & c_{3\,k_2} & c_{3\,k_3} & c_{3\,k_4} \\ c_{4\,k_1} & c_{4\,k_2} & c_{4\,k_3} & c_{4\,k_4} \end{vmatrix}.$$

Краевые условия (2.4), (2.5) в новых обозначениях могут быть переписаны в виде:

$$U_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \left[c_{ij} X^{(j-1)}(0) + c_{i,4+j} X^{(j-1)}(l) \right] = 0, \qquad (4.2)$$

$$i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

В новых обозначениях обратная задача формулируется следующим образом: коэффициенты c_{ij} задачи (2.2), (4.2) — неизвестны; ранг матрицы C, составленной из этих коэффициентов, равен четырем; миноры A_{14}, A_{23}, B_{14}, B_{23} матриц A и B, из которых составлена матрица C, равны нулю; известны собственные значения ω_k задачи (2.2), (4.2). Требуется восстановить линейную оболочку $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle$, построенную на векторах $\mathbf{c}_i = (c_{i1},\, c_{i2},\, c_{i3},\, c_{i4},\, c_{i5},\, c_{i6},\, c_{i7},\, c_{i8})^{\mathrm{T}}$ $(i = 1,\, 2,\, 3,\, 4)$.

Отметим, что отыскание линейной оболочки $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle$ эквивалентно отысканию матрицы C с точностью до линейной эквивалентности.

Наряду с формами (4.2) рассмотрим следующие линейные однородные формы:

$$\widetilde{U}_i(X) = \sum_{j=1}^{4} \left[\widetilde{c}_{ij} X^{(j-1)}(0) + \widetilde{c}_{i,4+j}\, X^{(j-1)}(l) \right] = 0, \qquad (4.3)$$

$$i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов $\widetilde{c}_{ij}$, через $\widetilde{C}$, а ее миноры — через $\widetilde{M}_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$, а соответствующие миноры второго порядка — через $\widetilde{A}_{k_1\,k_2}$ и $\widetilde{B}_{k_3-4\,k_4-4}$.

Введем в рассмотрение также векторы:

$$\mathbf{c}_i^{+} = (\widetilde{c}_{i1},\, \widetilde{c}_{i2},\, \widetilde{c}_{i3},\, \widetilde{c}_{i4},\, \widetilde{c}_{i5},\, \widetilde{c}_{i6},\, \widetilde{c}_{i7},\, \widetilde{c}_{i8})^{\mathrm{T}}, \qquad i = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема (о единственности решения обратной задачи). *Пусть* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = 4$. *Если собственные значения* $\{\omega_k\}$ *задачи (2.2), (4.2) и* $\{\widetilde{\omega}_k\}$ *задачи (2.2), (4.3) совпадают с учетом их кратностей, то* $\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^{+},\, \mathbf{c}_2^{+},\, \mathbf{c}_3^{+},\, \mathbf{c}_4^{+} \right\rangle$.

Доказательство. Заметим, что характеристический определитель можно представить в следующей форме:

$$\Delta(\omega_k) = \det(C\,D), \qquad \text{где}$$

$$D = \left\| \begin{array}{cccc} X_1(0) & X_2(0) & X_3(0) & X_4(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) & X_3'(0) & X_4'(0) \\ X_1''(0) & X_2''(0) & X_3''(0) & X_4''(0) \\ X_1'''(0) & X_2'''(0) & X_3'''(0) & X_4'''(0) \\ X_1(l) & X_2(l) & X_3(l) & X_4(l) \\ X_1'(l) & X_2'(l) & X_3'(l) & X_4'(l) \\ X_1''(l) & X_2''(l) & X_3''(l) & X_4''(l) \\ X_1'''(l) & X_2'''(l) & X_3'''(l) & X_4'''(l) \end{array} \right\|.$$

Используя формулу Бине-Коши [13], получаем

$$\Delta(\omega_k) = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_8\le 8} M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}\; f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}, \tag{4.4}$$

где $f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ — миноры четвертого порядка матрицы D, составленные из строк с номерами $k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4$:

$$M_{k_1k_2k_3k_4} = \left| \begin{array}{cccc} c_{1k_1} & c_{1k_2} & c_{1k_3} & c_{1k_4} \\ c_{2k_1} & c_{2k_2} & c_{2k_3} & c_{2k_4} \\ c_{3k_1} & c_{3k_2} & c_{3k_3} & c_{3k_4} \\ c_{4k_1} & c_{4k_2} & c_{4k_3} & c_{4k_4} \end{array} \right|.$$

Поскольку

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = 0 \qquad \text{при} \quad k_3,\ k_4 \le 4, \quad k_1,\ k_2 \ge 5,$$

то, применяя теорему Лапласа для вычисления определителя и учитывая, что $\Delta(\omega_k) = 0$, получаем:

$$\sum_{\substack{1\,\le\, k_1\,<\,k_2\,\le\, 4\\ 5\,\le\, k_3\,<\,k_4\,\le\, 8}} M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}\; f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}(\omega_k) = 0, \tag{4.5}$$

где

$$M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4} = A_{k_1,\,k_2}\, B_{k_3-4,\,k_4-4}, \tag{4.6}$$

$$(A_{14} = A_{23} = B_{14} = B_{23} = 0).$$

Из свойств общей теории для линейных дифференциальных операторов следует, что функция $\Delta(\omega)$ является целой функцией порядка $1/2$ [14].

Отсюда следует, что характеристические определители $\Delta(\omega)$ и $\widetilde{\Delta}(\omega)$ задач (2.2), (4.2) и (2.2), (4.3) соответственно связаны соотношением

$$\Delta(\omega) \equiv K\,\widetilde{\Delta}(\omega), \tag{4.7}$$

где K — некоторая отличная от нуля константа.

Из (4.4) и (4.7) следует, что

$$\begin{gathered}
\big[M_{1256}-K\,\widetilde{M}_{1256}\big]\,f_{1256}+\big[M_{1257}-K\,\widetilde{M}_{1257}\big]\,f_{1257}+\\
+\big[M_{1268}-K\,\widetilde{M}_{1268}\big]\,f_{1268}+\big[M_{1278}-K\,\widetilde{M}_{1278}\big]\,f_{1278}+\\
+\big[M_{1356}-K\,\widetilde{M}_{1356}\big]\,f_{1356}+\big[M_{1357}-K\,\widetilde{M}_{1357}\big]\,f_{1357}+\\
+\big[M_{1368}-K\,\widetilde{M}_{1368}\big]\,f_{1368}+\big[M_{1378}-K\,\widetilde{M}_{1378}\big]\,f_{1378}+\\
+\big[M_{2456}-K\,\widetilde{M}_{2456}\big]\,f_{2456}+\big[M_{2457}-K\,\widetilde{M}_{2457}\big]\,f_{2457}+\\
+\big[M_{2468}-K\,\widetilde{M}_{2468}\big]\,f_{2468}+\big[M_{2478}-K\,\widetilde{M}_{2478}\big]\,f_{2478}+\\
+\big[M_{3456}-K\,\widetilde{M}_{3456}\big]\,f_{3456}+\big[M_{3457}-K\,\widetilde{M}_{3457}\big]\,f_{3457}+\\
+\big[M_{3468}-K\,\widetilde{M}_{3468}\big]\,f_{3468}+\\
+\big[M_{3478}-K\,\widetilde{M}_{3457}\big]\,f_{3478}\equiv 0.
\end{gathered} \tag{4.8}$$

Пусть жидкость течет по трубе. Это означает, что скорость течения жидкости $V_0 \neq 0$, а в уравнении (2.2) коэффициент $b \neq 0$.

Нетрудно показать в пакете Maple, что в последнем тождестве все правые сомножители, за исключением одной функции $f_{1356} = -f_{1257}$, образуют линейно независимую систему. Тогда из линейной независимости функций

$$\begin{array}{ccc}
f_{1256}(\omega), & f_{1357}(\omega), & f_{2468}(\omega),\\
f_{1256}(\omega), & f_{1378}(\omega), & f_{3457}(\omega),\\
f_{2478}(\omega), & f_{3468}(\omega), & f_{2368}(\omega),\\
f_{2457}(\omega), & f_{1278}(\omega), & f_{3456}(\omega),\\
f_{1268}(\omega), & f_{2456}(\omega), & f_{1257}(\omega)
\end{array}$$

вытекают следующие равенства:

$$M_{1256}=K\,\widetilde{M}_{1256}, \tag{4.9}$$
$$M_{1357}=K\,\widetilde{M}_{1357}, \tag{4.10}$$
$$M_{2468}=K\,\widetilde{M}_{2468}, \tag{4.11}$$
$$M_{3478}=K\,\widetilde{M}_{3478}, \tag{4.12}$$
$$M_{1378}=K\,\widetilde{M}_{1378}, \tag{4.13}$$
$$M_{3457}=K\,\widetilde{M}_{3457}, \tag{4.14}$$
$$M_{2478}=K\,\widetilde{M}_{2478}, \tag{4.15}$$
$$M_{1368}=K\,\widetilde{M}_{1368}, \tag{4.16}$$
$$M_{2457}=K\,\widetilde{M}_{2457}, \tag{4.17}$$
$$M_{1278}=K\,\widetilde{M}_{1278}, \tag{4.18}$$
$$M_{3456}=K\,\widetilde{M}_{3456}, \tag{4.19}$$
$$M_{2456}=K\,\widetilde{M}_{2456}, \tag{4.20}$$
$$M_{1268}=K\,\widetilde{M}_{1268}, \tag{4.21}$$
$$M_{3468}=K\,\widetilde{M}_{3468}, \tag{4.22}$$
$$M_{1257}-M_{1356}=K\,(\widetilde{M}_{1356}-\widetilde{M}_{1257}). \tag{4.23}$$

Далее доказательство разбивается на 15 случаев:

$$
\begin{gathered}
M_{1256} \neq 0; \qquad M_{1357} \neq 0; \qquad M_{2468} \neq 0; \\
M_{1256} \neq 0; \qquad M_{1378} \neq 0; \qquad M_{3457} \neq 0; \\
M_{2478} \neq 0; \qquad M_{3468} \neq 0; \qquad M_{2368} \neq 0; \\
M_{2457} \neq 0; \qquad M_{1278} \neq 0; \qquad M_{3456} \neq 0; \\
M_{1268} \neq 0; \qquad M_{2456} \neq 0; \\
M_{1256} = M_{1357} = M_{2468} = M_{3478} = \\
= M_{1378} = M_{3457} = M_{2478} = M_{3468} = \\
= M_{1368} = M_{2457} = M_{1278} = \\
= M_{3456} = M_{1268} = M_{2456} = 0.
\end{gathered}
\tag{4.24}
$$

Пусть реализуется один из этих случаев, например, первый. Итак, $M_{1256} = K\widetilde{M}_{1256} \neq 0$. Тогда из равенств

$$
\begin{aligned}
M_{1256} &= A_{12}\, B_{12} = a_1\, a_2\, b_1\, b_2, \\
\widetilde{M}_{1256} &= \widetilde{A}_{12}\, \widetilde{B}_{12} = \widetilde{a}_1\, \widetilde{a}_2\, \widetilde{b}_1\, \widetilde{b}_2
\end{aligned}
$$

получим, что элементы a_1, a_2, b_1, b_2, $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$ матриц C и $\widetilde{C}$ отличны от нуля. Разделим 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы C соответственно на a_1, a_2, b_1, b_2, а 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы $\widetilde{C}$ соответственно на $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_1$, $\widetilde{b}_2$.

После этих преобразований матрицы C и $\widetilde{C}$ с точностью до линейной эквивалентности примут вид

$$
C = \left\| \begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0
\end{array} \right\|,
$$

$$
\widetilde{C} = \left\| \begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & \widetilde{a}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \widetilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \widetilde{b}_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \widetilde{b}_3 & 0
\end{array} \right\|.
$$

Из этого представления для матриц C и $\widetilde{C}$ и равенства (4.9) следует, что $K = 1$. Из (4.20), (4.21) вытекает, что

$$
a_4 = \widetilde{a}_4, \qquad b_4 = \widetilde{b}_4. \tag{4.25}
$$

Аналогично из равенств (4.18), (4.19) следует, что

$$
a_3\, a_4 = \widetilde{a}_3\, \widetilde{a}_4, \qquad b_3\, b_4 = \widetilde{b}_3\, \widetilde{b}_4.
$$

Или из равенств (4.16), (4.17) следует, что

$$
a_3\, b_4 = \widetilde{a}_3\, \widetilde{b}_4, \qquad b_3\, a_4 = \widetilde{b}_3\, \widetilde{a}_4.
$$

Учитывая (4.25) и последние четыре равенства, получим

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \widetilde{a}_3, \qquad a_4 = \widetilde{a}_4 \\
b_3 &= \widetilde{b}_3, \qquad b_4 = \widetilde{b}_4.
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Таким образом, имеем $\langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^+, \mathbf{c}_2^+, \mathbf{c}_3^+, \mathbf{c}_4^+ \right\rangle$.

Пусть теперь из равенств (4.24) реализуется случай $M_{2478} = \; = K\, \widetilde{M}_{2478} \neq 0$.

Равенства $M_{2478} = a_2\, a_4\, b_3\, b_4$, $\widetilde{M}_{2478} = \widetilde{a}_2\, \widetilde{a}_4\, \widetilde{b}_3\, \widetilde{b}_4$ означают, что элементы a_2, a_4, b_3, b_4, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{a}_4$, $\widetilde{b}_3$, $\widetilde{b}_4$ матриц C и $\widetilde{C}$ отличны от нуля.

Разделим 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы C соответственно на a_4, a_2, b_4, b_3, а 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю строки матрицы $\widetilde{C}$ соответственно на $\widetilde{a}_4$, $\widetilde{a}_2$, $\widetilde{b}_4$, $\widetilde{b}_3$.

Тогда с точностью до линейной эквивалентности получим матрицы C и $\widetilde{C}$ в виде:

$$C = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{Vmatrix} \widetilde{a}_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \widetilde{a}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{b}_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{b}_3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С учетом полученного представления для матриц C и $\widetilde{C}$ и равенства (4.15) имеем, что $K = 1$.

Из равенств (4.18), (4.20) вытекает соответственно, что

$$a_1 = \widetilde{a}_1, \qquad b_1 = \widetilde{b}_1. \tag{4.27}$$

А из равенств (4.14), (4.21) следует, что

$$a_3\, b_1 = \widetilde{a}_3\, \widetilde{b}_1, \qquad a_1\, b_2 = \widetilde{a}_1\, \widetilde{b}_2.$$

Последние равенства с учетом (4.27) дают следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_1 &= \widetilde{a}_1, & a_3 &= \widetilde{a}_3, \\ b_1 &= \widetilde{b}_1, & b_2 &= \widetilde{b}_2. \end{aligned}$$

Снова получаем представление для линейных оболочек в виде:

$$\langle \mathbf{c}_1,\, \mathbf{c}_2,\, \mathbf{c}_3,\, \mathbf{c}_4 \rangle = \left\langle \mathbf{c}_1^+,\, \mathbf{c}_2^+,\, \mathbf{c}_3^+,\, \mathbf{c}_4^+ \right\rangle.$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что рассмотрение других случаев из равенств (4.24) приводит к таким же результатам.

Таким образом, в случае протекания жидкости по трубопроводу решение обратной задачи единственно. **Теорема доказана**.

5. Метод отыскания параметров закреплений трубы с протекающей жидкостью

Мы показали, что задача восстановления неизвестных краевых условий по собственным частотам изгибных колебаний трубы в случае протекания по ней жидкости имеет одно решение. Следующий вопрос — как построить это решение?

Можно, как в работе [6], воспользоваться двумя методами построения решения обратной задачи, основанными на представлении характеристического определителя в виде бесконечного произведения: $\Delta(\omega) \equiv K \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_k}\right)$. Однако при практической реализации эти методы оказываются неэффективными ввиду значительного накопления ошибок при вычислении соответствующего бесконечного произведения. Поэтому в настоящей работе применен другой метод, основанный на решении системы алгебраических уравнений.

Построим *точное решение* обратной задачи. Итак, пусть жидкость течет по трубе, т.е. в уравнении (2.2) коэффициент $b \neq 0$. В этом случае собственные частоты изгибных колебаний трубы $\{\omega_k\}$ удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{gathered}\Delta(\omega_k) = (M_{1257} - M_{1356})\, f_{1257}(\omega_k) + M_{1268}\, f_{1268}(\omega_k) + \\ +M_{2456}\, f_{2456}(\omega_k) + M_{1368}\, f_{1368}(\omega_k) + M_{2457}\, f_{2457}(\omega_k) + \\ +M_{1278}\, f_{1278}(\omega_k) + M_{3456}\, f_{3456}(\omega_k) + M_{1378}\, f_{1378}(\omega_k) + \\ +M_{3457}\, f_{3457}(\omega_k) + M_{2478}\, f_{2478}(\omega_k) + M_{3468}\, f_{3468}(\omega_k) + \\ +M_{1357}\, f_{1357}(\omega_k) + M_{2468}\, f_{2468}(\omega_k) + M_{1256}\, f_{1256}(\omega_k) + \\ +M_{3478}\, f_{3478}(\omega_k) = 0.\end{gathered} \tag{5.1}$$

Пусть ω_k — 14 собственных частот задачи (2.2), (4.2). Тогда равенства (5.1) образуют систему 14-ти линейных алгебраических уравнений относительно 15-ти неизвестных левых множителей последнего равенства.

Если $\mathrm{rank}\|\mathrm{f}_{\mathrm{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}}(\omega_\mathrm{k})\|_{15\times 14} = 14$, то, ввиду специального вида соответствующей матрицы C, задача нахождения этой матрицы имеет одно решение.

Покажем, как это делается. Так как $\mathrm{rank}\, C = 4$, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1357} \neq 0$, тогда матрицу C с помощью линейных преобразований можно привести к виду

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

При этом сами миноры M_{ijkl} не поменяются, только, возможно, множитель.

Для полученной матрицы имеем

$$\begin{aligned} M_{1257} &= a_2, \qquad & M_{3457} &= -a_4, \\ M_{1356} &= b_2, \qquad & M_{1378} &= -b_4. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тогда матрица C может быть записана в виде

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{3457}}{M_{1357}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_{1257}}{M_{1357}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{M_{1378}}{M_{1357}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{M_{1356}}{M_{1357}} & 1 & 0 \end{matrix}\right\|. \tag{5.3}$$

Миноры, в нашем случае

$$M_{1357}, \qquad M_{1257}, \qquad M_{3457}, \qquad M_{1356}, \qquad M_{1378},$$

участвующие в записи (5.3) матрицы C, назовем основными. А основной минор, с которого начинается построение, в нашем случае ненулевой минор M_{1357}, назовем центральным. Так как $\mathrm{rank}\, C = 4$, то нетрудно показать, как в рассмотренном случае, что элементы матрицы C всегда могут быть представлены в виде нулей, единиц и миноров самой матрицы. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2 *Если матрица системы уравнений (5.1) имеет ранг 14, то решение обратной задачи восстановления краевых условий (4.2) единственно.*

Собственные частоты задачи (2.2), (4.2) не всегда задаются точно. Поэтому возникает задача приближенного определения краевых условий. Построим теперь *приближенное решение* обратной задачи.

Пусть собственные частоты ω_k известны лишь приближенно:

$$\omega_k \approx \mu_k \ (k = 1, 2, ..., 14).$$

Ранг системы уравнений (5.1) равен 14. Подставив μ_k в систему уравнений (5.1), найдем неизвестные миноры M_{ijkl} с точностью до константы. Однако значения M_{ijkl}, $(i = = 1, 2, 3, 4, 5; \ \ j = 2, 3, 4, 5, 6; \ \ k = 3, 4, 5, 6, 7; \ l = 4, 5, 6, 7, 8)$, найденные по искаженным μ_k, могут не являться минорами какой-либо матрицы. А, следовательно, по ним невозможно построить матрицу C и соответствующие краевые условия.

Выход из такого затруднения состоит в следующем: из алгебраической геометрии известно, что числа $M_{1\ldots m}$ являются минорами некоторой матрицы тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера или, по-другому, квадратичные ρ — соотношения ([15]

$$\sum_{k=0}(-1)^k M_{i_1\ldots i_{m-1}j_k} M_{j_0\ldots j_{k-1}j_{k+1}\ldots j_m} = 0. \tag{5.4}$$

В нашем случае для матрицы C, при $M_{1357} \neq 0$, получаем следующие соотношения (с учетом нулевых миноров):

$$\begin{gathered} M_{1256}M_{1357} = M_{1257}M_{1356}, \\ M_{1278}M_{1357} = M_{1257}M_{1378}, \\ M_{1368}M_{1357} = M_{1356}M_{1378}, \\ M_{2457}M_{1357} = M_{1257}M_{3457}, \\ M_{3456}M_{1357} = M_{1356}M_{3457}, \\ M_{1378}M_{1357} = M_{3457}M_{1378}, \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered} M_{1268}M_{1357} = M_{1257}M_{1368} = M_{1256}M_{1378}, \\ M_{3468}M_{1357} = M_{3457}M_{1368} = M_{3456}M_{1378}, \\ M_{2456}M_{1357} = M_{1257}M_{3456} = M_{2457}M_{1356}, \\ M_{2478}M_{1357} = M_{1257}M_{3478} = M_{2457}M_{1378}, \\ M_{2468}M_{1357} = M_{2457}M_{1368} = M_{1256}M_{3478} = \\ = M_{1278}M_{3456} = M_{1378}M_{2456} = M_{1257}M_{3468} = \\ = M_{3457}M_{1268} = M_{1356}M_{2478}. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Если числа M_{ijkl} удовлетворяют соотношениям (5.5), (5.6), то они являются минорами некоторой матрицы, т.е. по ним можно восстановить краевые условия задачи (2.2), (4.2).

Если же числа M_{ijkl} не удовлетворяют соотношениям (5.5), (5.6), то можно выразить миноры

$$\begin{gathered} M_{1256}, \quad M_{1278}, \quad M_{1268}, \quad M_{1368}, \\ M_{2456}, \quad M_{2457}, \quad M_{2468}, \quad M_{3456}, \\ M_{3478}, \quad M_{3468}, \quad M_{2478} \end{gathered} \tag{5.7}$$

через основные миноры M_{1357}, M_{1257}, M_{3457}, M_{1356}, M_{1378}, и условия Плюккера будут выполняться автоматически.

Таким образом, можно в любом случае скорректировать значения M_{ijkl}, найденные из системы уравнений (5.1), так, чтобы они являлись минорами некоторой матрицы, и, следовательно, определить краевые условия.

Применение метода определения краевых условий по 14 собственным частотам колебаний трубы с жидкостью покажем на примерах.

Пример

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + X'' + 2i\,\omega\, X' - \omega^2\, X = 0, \tag{5.8}$$

изгибных колебаний трубы, определяемое следующими параметрами системы (труба – жидкость):

$$\begin{gathered} r_1 = 0,0095\text{м}, \quad r = 0,01\text{м}, \quad l = 5\text{м}, \\ \rho = 2,7\cdot 10^3\text{кг/м}^3, \quad \rho_0 = 10^3\text{кг/м}^3, \quad V_0 = 1\text{м/с}, \\ E = 6,9\cdot 10^9\text{Н/м}^2, \quad p_0 = 0,5\cdot 10^3\text{Н/м}^2. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Пусть известны 14 собственных частот ω_k задачи (5.8), (2.4), (2.5):

$$\begin{gathered} \omega_1 = 21,81, \qquad \omega_2 = 61,32, \qquad \omega_3 = 120,58, \\ \omega_4 = 199,56, \qquad \omega_5 = 298,27, \qquad \omega_6 = 416,71, \\ \omega_7 = 554,89, \qquad \omega_8 = 712,86, \qquad \omega_9 = 890,46, \\ \omega_{10} = 1087,86, \qquad \omega_{11} = 1304,99, \qquad \omega_{12} = 1541,86, \\ \omega_{13} = 1798,47, \qquad \omega_{14} = 2074,82. \end{gathered}$$

Найдем краевые условия. С помощью пакета Maple получаем, что ранг матрицы системы (5.1) равен 14, а ее решение имеет вид:

$$M_{1357} = K, \quad M_{3457} = K, \quad M_{1378} = -2\,K,$$

$$M_{3478} = -2\,K, \quad M_{1257} - M_{1356} = 0,$$

остальные миноры M_{ijkl} равны нулю. Здесь $K = \text{const} \neq 0$.

Из равенства $M_{1357} \neq 0$ имеем $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$.

Разделим первую строку матрицы C на a_1, вторую строку на a_3, третью — на b_1, четвертую — на b_3. Тогда получим, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $M_{1357} = 1$, т.е. $K = 1$. Тогда из равенств

$$M_{3457} = 1, \quad M_{1378} = -2, \quad M_{3478} = -2$$

получаем, что $a_4 = -1$, $b_4 = 2$, а из равенств

$$M_{1257} - M_{1356} = 0, \quad M_{1256} = 0$$

имеем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$.

Следовательно, матрица C имеет вид:

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Откуда получаем единственное представление для краевых условий:

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0,$$

$$X(1) + 2\,X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0.$$

Таким образом, при рассмотренных 14 собственных частотах колебаний трубы, по которой протекает жидкость, установлено, что левый конец трубы упруго закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной двум.

Заметим, что краевые условия определены верно. Именно эти граничные условия (вид упругого закрепления) и использовались при выборе частот колебаний ω_k.

Рассмотренный пример подтверждает единственность определения упругих закреплений трубы с жидкостью по спектру ее изгибных колебаний.

6. Заключение

ПВ работе показана однозначность решения задачи определения параметров упругих закреплений концов трубы с протекающей жидкостью по известному спектру собственных частот. Найден метод решения этой задачи. Приведен соответствующий пример.

Это можно пояснить не только на основе формул: если жидкость течет по трубопроводу, то концы трубы неравноправны (через один конец жидкость втекает, а через другой вытекает). Поэтому в случаях упругих закрепление концов трубы параметры всех четырех краевых условий определяется однозначно.

От того течет ли жидкость по трубе зависит также количество собственных частот необходимых для определения закреплений концов трубы. Если жидкость не течет по трубе, как было показано нами в работе [8], то достаточно знание 9 собственных частот колебаний для восстановления двойственным образом краевых условий. В данной работе мы показали, что при протекании жидкости по трубе, необходимо знание 14 собственных частот для определения всех четырех краевых условий.

Результаты проведенных исследований могут быть применены для выбора закрепления, при котором колебания трубы с жидкостью имели бы нужный (безопасный) спектр частот. Кроме того они применимы и для акустической диагностики закрепления трубы (правда, в этом случае требуется очень высокая точность приборов, измеряющих собственные частоты).

Список литературы

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., *Введение в акустическую динамику машин*, Наука, М., 1979.

2. Павлов Б. В., *Акустическая диагностика механизмов*, Машиностроение, М., 1971.

3. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

4. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.

5. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.

6. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М., “Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний”, *Прикладная математика и механика*, **65**:2 (2001), 290–298.

7. Сафина Г. Ф., “Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний”, *Контроль. Диагностика*, 2005, № 12, 55–59.

8. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49**:1 (2008), 139–147.

9. Сафина Г. Ф., “Исследования по крутильным колебаниям вала с дисками”, *Дефектоскопия*, 2011, № 3, 51-65.

10. G. F. Safina, “Investigations of the Torsional Vibrations of a Shaft with Disks”, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, **47**:3 (2011), 189-201.

11. *Вибрации в технике: справочник в 6-ти томах*: *Колебания линейных систем*, **1**, ред. Болотин В. В., Машиностроение, М., 1978.

12. Коллатц Л., *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*, Наука, М., 1968.

13. Ланкастер П., *Теория матриц: Пер. с англ.*, Наука, М., 1982.

14. Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, ГИТТЛ, М., 1956.

15. Постников М. М., *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1979.

To the proof of uniqueness of the decision of return tasks of the flexural to pipe fluctuations with proceeding liquid

© **G.F. Safina**[2]

Abstract. In work are considered a direct task on to determination of frequencies of flexural fluctuations of a narrow pipe from the incompressible liquid and return problem of diagnosing of parameters of fixing pipes with proceeding liquid on own frequencies of its flexural fluctuations. Theorems of uniqueness of determination of parameters elastic are proved pipe fixing in case of liquid course on it. It is established, that in case of liquid course on the pipeline it is necessary use from a range of frequencies of fluctuations of 14 values for determination of parameters of elastic fixing of a pipe. Methods are developed restoration of four regional conditions of a return task. Are provided examples

Key Words: pipe with proceeding liquid, frequencies of fluctuations, regional conditions, parameters of elastic fixing, task diagnosings, uniqueness of the decision.

[2] Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university, Neftekamsk; Safinagf@mail.ru