УДК 519.853.62

Проекционные обобщённые двухшаговые экстраградиентные методы для решения равновесных задач

© **В.Г. Малинов** [1]

Аннотация. В работе предлагаются и исследуются проекционные обобщённые двухшаговые экстраградиентные методы для решения задач равновесного программирования, когда седловые точки вычисляются для выпукло вогнутой непрерывно дифференцируемой функции с липшицевыми градиентами на выпуклом замкнутом подмножестве евклидова пространства. Средствами выпуклого анализа доказана сходимость и получены оценки скорости сходимости, для двух предложенных методов, без предположений о сильной выпукло вогнутости функции.

Ключевые слова: выпукло вогнутая функция, равновесная задача, проекционный обобщённый двухшаговый экстраградиентный метод.

1. Постановка задачи

На выпуклом замкнутом множестве $Q \times U \subset E^n \times E^m$ будем рассматривать задачу об отыскании седловой точки выпукло-вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, выпуклой по $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и вогнутой по $\mathbf{u} \in U \subset E^m$, то есть об отыскании точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q \times U$,

$$\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \leq \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in Q, \mathbf{u} \in U, \tag{1.1}$$

где предполагаем: а) множества $Q \subset E^n$ и $U \subset E^m$ непустые выпуклые замкнутые; б) функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ с овражными гиперповерхностями уровней определена в окрестности подмножества $W \subset Q \times U \subset E^{n+m}$, для всех фиксированных $\mathbf{u} \in U$ функция $g(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ выпукла на $Q \subset E^n$, а для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in Q$ функция $h(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ вогнута на $U \subset E^m$; в) множество $W_* = Q_* \times U_*$ седловых точек $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ на $W \subset E^{n+m}$ непустое; г) частные градиенты функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ Липшицевы на $Q \times U$,

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_x(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_x(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\| &\leq L\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|^2\right)^{1/2}, \\ \|\nabla\varphi_u(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)\| &\leq L^0\left(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\|^2\right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $L > 0, L^0 > 0$ – константы Липшица (см. [1] – [4]). В терминах оператора проектирования седловая точка $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in W_* \subset Q_* \times U_*$ задачи (1.1) характеризуется равенствами [3]

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \tau\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right], \quad \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \tau\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right], \quad \tau > 0, \tag{1.3}$$

где P_Q и P_U - операторы проектирования соответствующих векторов $\mathbf{x} \in Q$ и $\mathbf{u} \in U$ на множества Q и U.

2. Краткая предыстория методов решения задачи

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

Поставленная задача связана с решением различных классов экстремальных задач математической физики, оптимального управления, теории игр, математической экономики. В частности, задачи вычисления оптимальных решений многих прямых и двойственных задач математического программирования могут быть сведены к отысканию седловых точек соответствующих функций Лагранжа или их модификаций. Например, задача выпуклого программирования (ЗВП)

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in G \subset E^n, \quad G = \{\mathbf{x} \in E^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\, i \in [1:m]\}$$

приводит к эквивалентной (1.1) задаче отыскания седловой точки функции Лагранжа [1] – [5]

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}, g(\mathbf{x})),\, \mathbf{x} \in G \subset E^n,\, \mathbf{u} \in E^m. \tag{2.1}$$

Решению задачи (1.1) посвящён ряд работ (см., например, работы [1] – [8]). Можно выделить три направления исследований: 1) замена седловой функции модифицированной, с теми же седловыми точками, но уже имеющей новые свойства, позволяющие обосновать сходимость метода [3], [4]; 2) разработка других методов минимизации для решения задач вида (1.1) [2], [5]; 3) работы, объединяющие оба указанных подхода.

Предлагаемая работа относится ко второму направлению исследований и актуальна с учётом малочисленности методов решения седловых задач.

Кратко о некоторых итеративных методах решения этой задачи. Один из них — метод проекции градиента (МПГ) Эрроу-Гурвица

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \tau\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k + \tau\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right], \quad \tau > 0, \quad k \geq 0$$

где P_Q и P_U – операторы проектирования соответствующих векторов на множества Q и U. Известно, что для задачи минимизации $f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n,$ на простом множестве Q МПГ сходится, а для задач о точках равновесия сходимость МПГ доказана лишь при весьма ограничительных предположениях сильной выпукло вогнутости, что не выполняется для многих нужных классов задач. Например, функций Лагранжа задач минимизации при ограничениях, других седловых задач [1]– [8].

Метод отыскания седловой точки для вогнуто-выпуклой функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, названный автором "экстраградиентным"(ЭГМ), был предложен в работе [2]:

$$\mathbf{v}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \gamma\nabla f_x(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{z}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_u(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right],$$
$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \gamma\nabla f_v(\mathbf{v}^k, \mathbf{z}^k)\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_z(\mathbf{v}^k, \mathbf{z}^k)\right],\, \gamma > 0,\, k \geq 0.$$

ЭГМ сходится при почти тех же предположениях, что и МПГ, в нём проводится по два градиентных шага по обоим переменным. На первом этапе вычисляется экстраполированная точка $\left(\mathbf{v}^k, \mathbf{z}^k\right)$ (шаг МПГ), а на втором получается требуемая точка $\left(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}\right)$; каждая итерация требует четыре вычисления градиента.

В [6] предложены две модификации ЭГМ решения седловой задачи для вогнуто выпуклой функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, обладающие линейной скоростью сходимости для квадратичной или линейной ЗВП, эквивалентной минимизации функции (2.1). Они требуют соответственно два и три вычисления градиента на каждую итерацию. Лучший из них

$$\mathbf{z}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k - \gamma\nabla f_u(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \tau\nabla f_x(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k)\right],$$
$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k + \tau(\mathbf{z}^k - \mathbf{u}^k)/\gamma, \quad 0 < \tau < \gamma, \quad k \geq 0.$$

Метод имеет преимущества перед МПГ, а также перед ЭГМ из работы [2]. Для квадратичных задач получена оценка $\rho^2(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1}) \leq (1 - mc)\rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)$ скорости сходимости, где $\rho^2(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$, константы $c > 0$, $m > 0$, $0 < 1 - mc < 1$.

В работе [7] для решения задачи (1.1) предложены и обоснованы, наряду с другими (в том числе и непрерывными), итерационный процесс

$$\mathbf{v}^k = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k)\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \alpha\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k)\right],$$
$$\mathbf{u}^{k+1} = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{v}^k)\right],\ k \geq 0$$

и неявный итерационный процесс

$$\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \alpha\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^{k+1})\right], \quad \mathbf{u}^{k+1} = P_+\left[\mathbf{u}^k + \alpha\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^{k+1})\right],\ k \geq 0,$$

где P_+ – оператор проектирования на положительный ортант E^m_+. Доказана сходимость методов к седловой точке задачи (1.1), без оценки скорости сходимости.

Рассматриваемые методы получили дальнейшее развитие в работе [8] и других, где задачи вида (1.1) и многообразие других экстремальных задач и методы их решения обобщены к задачам и методам вычисления неподвижных точек экстремальных отображений.

Целью нашей работы является построение для решения задач вида (1.1) методов, по скорости сходимости не уступающих построенным на основе МПГ, и для случая такой задачи, что гиперповерхности уровней функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ имеют овражный характер. Тогда для решения задачи будут предпочтительны, например, многошаговые проекционные методы, приспособленные для минимизации таких функций.

3. Предлагаемые методы решения задачи и вспомогательные неравенства

Будем решать задачу (1.1) в случае овражности по переменной $\mathbf{x} \in E^n$ с помощью следующего проекционного обобщенного двухшагового метода:

$$\begin{gathered}\mathbf{z}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{y}^k\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)\right)\right],\\ \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{u}^k + \lambda_k\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k)\right], \quad k \geq 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\forall\,(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ начальная точка; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; параметры $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, $\lambda_k > 0$, $\gamma_{1k} > 0$, $\gamma_{2k} > 0$; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$. Метод (3.1) построен на основе проекционного обобщённого двухшагового двухэтапного четырёхпараметрического метода (ПОДМЧ) из работы [9]. В случае овражности гиперповерхностей уровня функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по обоим переменным $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и $\mathbf{u} \in U \subset E^m$ для решения задачи (1.1) предпочтителен следующий метод, также построенный на основе ПОДМЧ из работы [9]:

$$\begin{gathered}\mathbf{z}^k = P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k\mathbf{y}^k\right], \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k)\right)\right],\\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_k\mathbf{v}^k\right],\ \mathbf{u}^{k+1} = P_U\left[\mathbf{w}^k + \lambda_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{v}^k + \gamma_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\right)\right],\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $k \geq 0$; $\forall\,(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in E^n \times E^m$ – начальная точка; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; $\mathbf{v}^k = \mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}$; положительные параметры метода α_k, β_k, λ_k, γ_{1k}, γ_{2k}; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^0$. В (3.2) все другие обозначения сохраняются из (3.1).

Примечание 1. Отметим, что везде далее в этой работе для простоты обозначено $\nabla\varphi_x$ – частный градиент по первому аргументу, а $\nabla\varphi_u$ – по второму. Дифференцирование производится в точках, указанных в аргументах соответствующих функций.

3.2. Получим неравенства, дополняющие необходимый для обоснования сходимости и оценки скорости сходимости многошаговых методов математический инструментарий.

Л е м м а 1. *В евклидовом пространстве* E^n *имеет место двойное неравенство*

$$\begin{gathered}(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \le \\ \le (1+\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1+\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in E^n.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{w})+\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in E^n, \tag{3.4}$$

запишем его в форме

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2-2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})+\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \tag{3.5}$$

и второе слагаемое в правой части (3.5) оценим с помощью неравенства

$$2|(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})|\le\varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+\varepsilon^{-1}\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2,\, \varepsilon>0, \tag{3.6}$$

следующего из известного неравенства $2|ab|\le\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2,\ \forall\, a,b,\varepsilon>0$.

Тогда из (3.6) получим $\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2\ge(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$. Левое неравенство (3.3) доказано. Пользуясь (3.6) в равенстве (3.4), получим правую часть (3.3), совпадающую с известным неравенством.

Лемма 1 доказана.

Отметим, что правое неравенство (3.3) известное, здесь оно для единообразия выведено в пространстве E^n, а левое неравенство (3.3) является результатом объединения применявшихся ранее при обосновании методов оптимизации разрозненных процедур получения нижней оценки квадрата нормы разности векторов в E^n.

3.3. **Л е м м а 2.** *В евклидовом пространстве* E^n *для любой тройки точек* $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}\in E^n$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\ge(\varepsilon-1)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2, \tag{3.7}$$

где $0<\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}=\left[s\mp(s^2-4l_2l_3)^{1/2}\right]/(2l_2)$, $\quad l_1=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$, $\quad l_2=\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2$, $l_3=\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2$, $\quad s=l_1+l_2+l_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку E^n метрическое пространство с метрикой $\rho(\mathbf{u},\mathbf{v})=\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \quad \forall\,\mathbf{u},\mathbf{v}\in E^n$, в нём имеет место неравенство ([12], с. 31)

$$|\rho(\mathbf{u},\mathbf{x})-\rho(\mathbf{v},\mathbf{y})|\le\rho(\mathbf{u},\mathbf{v})+\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\forall\,\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y}\in E^n. \tag{3.8}$$

Отсюда с помощью формулы для метрики получим неравенство $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|-\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|+\|\mathbf{x}-\mathbf{x}\|$. Возведём его в квадрат и воспользуемся под знаком модуля формулой для квадрата разности, $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-2\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$ и удвоенное произведение под знаком модуля оценим с помощью известного неравенства (3.6), тогда $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-\varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2-\varepsilon\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$.

Представим абсолютную величину в форме двойного неравенства

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2\le(1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\|^2+(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|^2\le\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2. \tag{3.9}$$

Возьмём левую часть этого неравенства и, умножив на -1, придём к неравенству (3.7). Решая неравенство (3.7) относительно $\varepsilon>0$ при данных обозначениях, получаем для этого числа интервал возможных в (3.7) значений. Заметим, что правое неравенство в (3.9) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $\mathbf{x}=\mathbf{v}$, $\mathbf{v}=\mathbf{w}$ совпадает с левым неравенством (3.3).

Лемма 2 доказана.

3.4. **Примечание 2.** Верхняя и нижняя границы числа ε в (3.7) зависят от соотношения длин сторон треугольника с вершинами $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ (например, это $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^*$; случай их расположения на одной прямой не исключается; в данной работе предполагаем, что упорядоченная тройка точек $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{x}$ соответствуют порядку вычисления точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ метода).

Зададим дополнительные ограничения, при которых обеспечиваются конкретные значения ε, используемые в доказательстве теорем. Например, не обременительны условия: а) $\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, его аналог при $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$, $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$ запишется в виде

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|; \tag{3.10}$$

б) неравенства $2\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, их аналог $2\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|$;

в) неравенства $(11/5)\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, их аналог $(11/5)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|$;

г) неравенства $3\|\mathbf{u}-\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{x}\|$, ...

В случае а) для вычисления границ ε решаем следующее из (3.7) неравенство

$$l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \le 0, \tag{3.11}$$

полагая $l_1=l_2=l_3$. Получаем значения $\varepsilon_{1,2}=(3\mp 5^{1/2})/2$, то есть округлённо можно принять значения из интервала $0.39 \le \varepsilon \le 2.61$. В случае б) решаем неравенство, аналогичное (3.11), положив $4l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(9\mp 65^{1/2})/2$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.47 \le \varepsilon \le 8.5$. В случае в) решаем неравенство, аналогичное (3.11), положив $(121/25)l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(267\mp 60189^{1/2})/50$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.48 \le \varepsilon \le 10$, достаточен для применения (3.7) в данной работе. В случае г) решаем неравенство, полученное из (3.11) при $9l_2=l_1=l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2}=(19\mp 325^{1/2})/2$; тогда искомый приближённый интервал $0.5 \le \varepsilon \le 18.5$.

О неравенстве (3.7). Оно является новым в обосновании методов решения экстремальных задач и выведено для обоснования методов класса ПОДМ, служит хорошим математическим инструментом при доказательстве сходимости и оценке скорости сходимости методов минимизации. Появление дополнительных ограничений неравенств при его применении здесь не представляется обременительным. Неравенство (3.7) получено на основе известного из функционального анализа неравенства четырёхугольника для метрики. Его частный случай известен как второе неравенство треугольника для метрики ([13], с. 27) $|\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})-\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})| \le \rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$ в метрическом пространстве (X,ρ).

Далее докажем сходимость и получим оценки скорости сходимости для метода (3.1), а затем — для метода (3.2).

4. Обоснование сходимости метода (3.1)

О сходимости метода (3.1) с параметрами константами имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения а) - г) из п.1, параметры метода (3.1) таковы, что*

$$\begin{gathered} 0<\alpha<1/5=\alpha^0,\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\gamma_2<4(3-5\alpha)\gamma_1/(15L\alpha), \\ 0<\lambda<1/L^0,\ 0<\beta<(\alpha-5\alpha^2)/(2\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \longrightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$, $k \to \infty$, *то есть найдётся седловая точка* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$ *такая, что процесс (3.1), (4.1) по норме пространства* $E^n \times E^m$ *к ней сходится, то есть* $\{\mathbf{x}^k\} \to \mathbf{x}^* \in Q_*$, $\{\mathbf{u}^k\} \to \mathbf{u}^* \in U_*$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \in E^{n+m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя методике обоснования сходимости из работ [3], [5], [7], представим уравнения из (3.1) в виде вариационных неравенств:

$$\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k\right) \geq 0, \tag{4.2}$$

$$\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k - \beta\gamma_1 \mathbf{y}^k + \beta\gamma_2 \nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}\right) \geq 0, \tag{4.3}$$

$$\left(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k - \lambda \nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k), \mathbf{u} - \mathbf{u}^{k+1}\right) \geq 0. \tag{4.4}$$

Сначала преобразуем (4.2) и (4.3), положив в (4.2) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, в (4.3) $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, пользуясь неравенством Коши-Буняковского и нерасширяющим свойством оператора проектирования ([10], с. 190). Из (4.2) имеем: $\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha \mathbf{y}^k, \mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\right) \geq 0$, или

$$\begin{gathered} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 \leq \alpha\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\right) \leq \alpha \|\mathbf{y}^k\| \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\| = \\ = \alpha\|\mathbf{y}^k\| \|P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k\right) - P_Q(\mathbf{x}^k)\| \leq \alpha^2 \|\mathbf{y}^k\|^2. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Из (4.3) получим неравенство

$$\begin{gathered} \left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) - \beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) + \\ + \beta\gamma_2\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right) \geq 0, \end{gathered} \tag{4.6}$$

и первое слагаемое в нём выразим с помощью известного равенства (3.4),

$$\left(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\right) = \left(\|\mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2\right/ 2.$$

Подставим эту оценку в (4.6) и запишем полученное после этого неравенство в форме

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ -2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \leq 2\beta\gamma_2\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right),\ k \geq 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Здесь сначала преобразуем третье слагаемое в левой части с помощью нерасширяющего свойства оператора проектирования ([10], с. 190),

$$\begin{gathered} \|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 = \|P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k\right) - P_Q(\mathbf{x}^*)\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k + \alpha \mathbf{y}^k - \mathbf{x}^*\|^2 = \\ = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + 2\alpha\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k\right) + \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2, \end{gathered}$$

где скалярное произведение преобразуем с помощью (3.4),

$$2\left(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^k\right) = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Тогда получим оценку

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + (\alpha^2 + \alpha)\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \tag{4.8}$$

и, с учётом (4.8), неравенство (4.7) запишется

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - \\ -(1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - (\alpha^2 + \alpha)\|\mathbf{y}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \\ -2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \leq 2\beta\gamma_2\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right),\ k \geq 0. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Далее скалярное произведение в правой части (4.9) представим в виде суммы $\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\right) + \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right)$ и для первого слагаемого воспользуемся критерием выпуклости ([10], с. 164) $(f(\mathbf{v}), \mathbf{u}-\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{u})-f(\mathbf{v})\ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q$ ввиду выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по первой переменной, а для второго слагаемого — неравенством для функции $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ ([11], с. 164): $(f(\mathbf{v}), \mathbf{v}-\mathbf{u}) \leq f(\mathbf{v})-f(\mathbf{u})+L\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2/2\ \ \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in Q$. Тогда, с учётом справедливости неравенства $\varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) \leq \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k)$ ввиду (1.1), то есть выпуклости функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по переменной $\mathbf{x} \in E^n$, для суммы имеем

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\right) + \left(\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right) \leq \\ \leq \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) + \varphi(\mathbf{z}^k, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k) + L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2 \leq \\ \leq \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^k) - \varphi(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k) + L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2 \leq L\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/2.\end{gathered} \tag{4.10}$$

Учитывая (4.10), из (4.9) получим:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - L\beta\gamma_2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 - 2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + (\alpha^2+\alpha)\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k \geq 0.\end{gathered} \tag{4.11}$$

Второй квадрат нормы в левой части (4.11) преобразуем с помощью оценки

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.12}$$

которую получим из левого неравенства (3.3) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$. Положим $\varepsilon = 1/5$ в (4.12), а второй квадрат нормы в его правой части оценим с помощью (4.5):

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \geq 4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + 4\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2. \tag{4.13}$$

Подставив (4.13) в (4.11), придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + 4(1 - L\beta\gamma_2)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 - 2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + a_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k \geq 0,\end{gathered} \tag{4.14}$$

где $a_{41} = \alpha + 5\alpha^2 - 4L\alpha^2\beta\gamma_2 < 2\alpha - 4L\alpha^2\beta\gamma_2$, $5\alpha^2 < \alpha$; $1 - L\beta\gamma_2 > 0$.

В левой части (4.14) третье слагаемое представим в виде суммы

$$-2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) = \beta\gamma_1\left[2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) - 2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)\right] \tag{4.15}$$

и преобразуем с помощью равенства (3.4) и неравенства (3.6) при $\varepsilon = 1/3$:

$$\begin{gathered}2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2, \\ -2(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) \geq -\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/3 - 3\|\mathbf{y}^k\|^2;\end{gathered}$$

тогда

$$\begin{gathered}-2\beta\gamma_1\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right) \geq \\ \geq \beta\gamma_1\left(\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 - 4\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/3\right).\end{gathered} \tag{4.16}$$

Подставив (4.16) в (4.14), получим (здесь и далее β^{ki}, γ_2^{ki}, λ^{ki} — функции от параметров метода)

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \\ \leq a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \geq 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

где $a_1 = 4(1 - L\beta\gamma_2)/5 - \beta\gamma_1/3$, $a_2 = \alpha + \beta\gamma_1$, $a_3 = 1 + a_2$, $a_4 = a_{41} + 4\beta\gamma_1 = 2\alpha + 4\beta\gamma_1 - 4L\alpha^2\beta\gamma_2$; $a_1 > 0$ при $\beta < \beta^{11} = 12/(5\gamma_1 + 12L\gamma_2)$; $a_4 > 2\alpha$ при $\gamma_2 < \gamma_2^{11} = \gamma_1/(L\alpha^2)$.

Теперь преобразуем (4.4). При $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ из него следует неравенство

$$\left(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k, \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\right) \geq \lambda\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k), \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\right),\ k \geq 0. \tag{4.18}$$

Здесь первое скалярное произведение оценим с помощью равенства (3.4),

$$\left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)=\left(\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2-\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right)/2, \tag{4.19}$$

а скалярное произведение в правой части (4.18) представим в виде суммы

$$\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)=\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k+\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1}\right) \tag{4.20}$$

и первое слагаемое оценим с помощью неравенства для вогнутой функции ([11], с. 36) $(f(\mathbf{u}),\mathbf{v}-\mathbf{u})\geq f(\mathbf{v})-f(\mathbf{u})$ ввиду вогнутости функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ по второму аргументу,

$$\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^k\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k), \tag{4.21}$$

а второе слагаемое — с помощью неравенства ([10], с. 93) для функции $g(\mathbf{u})\in C^{1,1}(U)$, $\|g(\mathbf{v})-g(\mathbf{u})-(\nabla g(\mathbf{u}),\mathbf{v}-\mathbf{u})\|\leq L\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|^2/2$, то есть

$$-\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2.$$

С учётом этого неравенства и (4.21), а также $\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\geq 0$ ввиду вогнутости функции по второму аргументу, из (4.20) имеем,

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\geq\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\\-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2\geq -L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/2.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Подставив (4.19) и (4.22) в (4.18), придём к неравенству

$$\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^k\|^2\leq\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\geq 0, \tag{4.23}$$

где $b_1=1-L^0\lambda>0$ при условиях (4.1).

Сложив неравенство (4.23) для переменной $\mathbf{u}\in E^m$ с (4.17), получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+\\+a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2\leq a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k\geq 0.\end{gathered} \tag{4.24}$$

Просуммируем неравенства (4.24) от $k=0$ до $k=m$, $m\geq 1$, тогда

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^m\|^2+\\+(a_1-a_4)\textstyle\sum_{k=0}^{k=m-1}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\sum_{k=0}^{k=m}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\leq\\\leq a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2+(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2,\ m\geq 1,\end{gathered}$$

где $a_1-a_4>0$ при условиях (4.1). Упростим его, пользуясь оценкой первого слагаемого в правой части $a_2\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^*\|^2\leq 2a_2\left(\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^{m+1}\|^2+\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2\right)$, следующей из правого неравенства (3.3). С учётом неравенств $a_1-2a_2>a_1-a_4>0$, $a_4>2a_2$ при $0<\alpha<1/5$, $0<\beta<(\alpha-\alpha^2)/(2\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2)<\beta^{11}$, $0<\gamma_2<4(3-5\alpha)\gamma_1/(15L\alpha)<\gamma_2^{11}$, запишем

$$\begin{gathered}(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2+\\+\textstyle\sum_{k=0}^{k=m}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^k\|^2\right]\leq\\\leq(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2.\end{gathered} \tag{4.25}$$

При $m\to\infty$ сумма в левой части (4.25) ограничена и следует сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{k=\infty}\left[(a_1-a_4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right].$$

Следовательно, для (4.25) имеют место соотношения

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|\to 0,\quad \|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|\to 0,\quad k\to\infty,$$

последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2\right\}$ невозрастающая, последовательность $\left\{\mathbf{x}^k;\mathbf{u}^k\right\}$ ограничена; (4.25) эквивалентно неравенству

$$(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{m+1}-\mathbf{u}^*\|^2\le(1-a_2)\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^0-\mathbf{u}^*\|^2$$

и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}^{k_i};\mathbf{u}^{k_i}\right\}\to(\mathbf{x}^*;\mathbf{u}^*)$, $k_i\to\infty$ такая, что

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k_i}-\mathbf{x}^*\|+\|\mathbf{u}^{k_i}-\mathbf{u}^*\|\to 0,\ k_i\to\infty,\\ \|\mathbf{x}^{k_i}-\mathbf{x}^{k_i+1}\|+\|\mathbf{u}^{k_i}-\mathbf{u}^{k_i+1}\|\to 0,\ k_i\to\infty.\end{gathered}\tag{4.26}$$

Тогда в пределе при $k\to\infty$ из второго и третьего уравнений (3.1) следуют равенства

$$\mathbf{x}^*=P_Q\left[\mathbf{x}^*-\beta\gamma_2\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\right],\ \mathbf{u}^*=P_U\left[\mathbf{u}^*+\lambda\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\right],$$

$\beta,\,\gamma_2,\,\lambda>0$, эквивалентные характеристике (1.3) седловой точки в терминах оператора проектирования; следовательно, $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ есть седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$, то есть решение задачи (1.1).

Положим $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^*=\mathbf{u}^e$ и выберем $\forall\varepsilon>0$ и номер $k_{i_0}=r$ так, чтобы с этого номера выполнялись неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k_i}-\mathbf{x}^{k_i-1}\|^2\le\varepsilon/(3a_4),\|\mathbf{x}^{k_i}-\mathbf{x}^e\|^2\le\varepsilon/3,\|\mathbf{u}^{k_i}-\mathbf{u}^e\|^2\le\varepsilon/3,\tag{4.27}$$

и просуммируем (4.24) при $\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^*=\mathbf{u}^e$, теперь от $k=m$ до $k=m+N$ при $m+N>m>r$; получим неравенство

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+N+1}-\mathbf{x}^e\|^2+\|\mathbf{u}^{m+N+1}-\mathbf{u}^e\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{m+N+1}-\mathbf{x}^{m+N}\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{m-1}-\mathbf{x}^e\|^2+\\ +(a_1-a_4)\sum_{k=m}^{k=m+N-1}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+b_1\sum_{k=m}^{k=m+N}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\le\\ \le a_2\|\mathbf{x}^{m+N}-\mathbf{x}^e\|^2+\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^e\|^2+a_4\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^{m-1}\|^2+\|\mathbf{u}^r-\mathbf{u}^e\|^2.\end{gathered}\tag{4.28}$$

Здесь для первого слагаемого в правой части воспользуемся неравенством

$$a_2\|\mathbf{x}^{m+N}-\mathbf{x}^e\|^2\le 2a_2\left(\|\mathbf{x}^{m+N}-\mathbf{x}^{m+N+1}\|^2+\|\mathbf{x}^{m+N+1}-\mathbf{x}^e\|^2\right).\tag{4.29}$$

Подставим (4.29) в (4.28) и, учитывая выкладки после (4.25), неравенства (4.26), (4.27), из (4.28) получим

$$\begin{gathered}(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+N+1}-\mathbf{x}^e\|^2+\|\mathbf{u}^{m+N+1}-\mathbf{u}^e\|^2\le\\ \le a_4\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^{m-1}\|^2+\|\mathbf{x}^r-\mathbf{x}^e\|^2+\|\mathbf{u}^r-\mathbf{u}^e\|^2\le\varepsilon,\end{gathered}$$

что означает фундаментальность последовательности $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}$. Отсюда следует сходимость из любой начальной точки всей последовательности $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}$ к седловой точке задачи (1.1), то есть $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}\to(\mathbf{x}^e,\mathbf{u}^e)=(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\in Q_*\times U_*$, $k\to\infty$, ибо пространство E^{n+m} полное, неравенство (4.24) выполняется для седловой точки $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\in Q_*\times U_*$ и последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2\right\}$ монотонна и ограничена.

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Поскольку в теореме 1 доказана монотонная сходимость последовательности* $\left\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\right\}$, *то имеют место неравенства*

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|\le\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|\le\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|\le...,\\ \|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|\le\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|\le\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|\le...,\end{gathered}$$

а также
$$\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^k\| \geq \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k+2}\| \geq ...,$$
$$\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^k\| \geq \|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^{k+2}\| \geq ....$$

Примечание 2. Отметим, что: а) в условиях теоремы 1 неопределённое значение γ_1^0 параметра метода может быть выбрано из условия $0<\gamma_1^0<9\alpha_0$; б) при реализации методов выбор точки $\mathbf{z}^k$ и параметра α_k производим с учётом (4.1) и неравенства $g(\mathbf{z}^k) \leq g(\mathbf{x}^{k-1})$, $k=0,1,2,\ldots$.

5. Оценка скорости сходимости метода (3.1)

Получим оценку скорости сходимости метода (3.1), (4.1) при дополнительном ограничении и условиях на параметры метода.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того: 1) выполнены неравенства (3.10б); 2) параметры метода таковы, что*
$$\begin{gathered} 0<\beta<(1-6\alpha)/(21\gamma_1/2+Ld\gamma_2), d=1-8\alpha^2, \\ 5L^0\lambda+10\alpha+10\beta\gamma_1<1+4L\beta\gamma_2,\ 0<\gamma_2<(25\gamma_1)/(12L). \end{gathered} \tag{5.1}$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k\}$ *метода (3.1), (4.1), (5.1) сходится к некоторой седловой точке* $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)$ *задачи (1.1) со скоростью геометрической прогрессии,*
$$\rho(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k) \leq q^k \rho(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0), \tag{5.2}$$
где $q=\left[(12+5\alpha+5\beta\gamma_1-2L\beta\gamma_2)/(12.5-2.5L^0\lambda)\right]^{1/2}$, $0<q<1$ *при условиях (4.1), (5.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при условиях теоремы 2 метод сходится и справедливо неравенство (4.24). В (4.24) сначала оценим пятое слагаемое в левой части с помощью левого неравенства (3.3), полученного в лемме 1. При $\varepsilon=2$ получим оценку
$$a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2 \geq -a_2\|\mathbf{y}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2/2. \tag{5.3}$$

Далее в (4.24) оценим третье слагаемое в левой части с помощью неравенства (3.7), положив $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*$, $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$, $\varepsilon=3$. Затем умножим на $3a_1/8$. Тогда получим
$$3a_1/8\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \geq 3a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2/4-a_1\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2/4. \tag{5.4}$$

Аналогично процедуре получения (5.4), положим в (3.7) $\mathbf{u}=\mathbf{u}^{k+1}$, $\mathbf{x}=\mathbf{u}^*$, $\mathbf{v}=\mathbf{u}^k$, $\varepsilon=5/4$ и полученное неравенство умножим на b_1. Тогда придём к оценке четвёртого слагаемого в левой части (4.24),
$$b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2 \geq b_1\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2/4-b_1\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2/5. \tag{5.5}$$

После подстановки (5.3), (5.4) и (5.5), из (4.24) следует,
$$\begin{gathered}(1+3a_1/4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+(1+b_1/4)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2 \leq \\ \leq a_5\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_2\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_6\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k\geq 0,\end{gathered} \tag{5.6}$$

где $a_5=a_3-a_2/2+a_1/4<6/5+\alpha/2+\beta\gamma_1/2-L\beta\gamma_2/5$, $a_6=a_4+a_2=3\alpha+5\beta\gamma_1-4L\alpha^2\beta\gamma_2$, $b_2=1+b_1/5=6/5-L^0\lambda/5$, $1+b_1/4=(5-L^0\lambda)/4$.

Теперь покажем, что в (5.6) $a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8 \leq 0$. Действительно, имеют место неравенства: $\|\mathbf{y}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2$ в силу следствия теоремы 1; $a_6-5a_1/8<$

$3\alpha+21\beta\gamma_1/4+Ld\beta\gamma_2/2-1/2<0$ (при $0<\beta<\beta^{21}=(1-6\alpha)/(21\gamma_1/2+Ld\gamma_2)$, $0<\alpha<1/6$); $(a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq 0$; $5a_1/8>a_6-5a_1/8$. Пользуясь этими неравенствами, верными при условиях теоремы, получаем:

$$\begin{gathered}
0\geq (a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{y}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2\right)= \\
=a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-a_6\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq \\
\geq a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+(a_6-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\geq \\
\geq a_6\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8.
\end{gathered} \tag{5.7}$$

В (5.6) учтём (5.7) и неравенства: $b_2<a_5$ при $0<\gamma_2\leq 25\gamma_1/(12L)=\gamma_2^{21}$; $1+b_1/4<1+3a_1/4$ при $\beta<\beta^{22}=(7+5L^0\lambda)/(5\gamma_1+12L\gamma_2)$, $\beta<\beta^{21}<\beta^{22}$. Тогда из (5.6) получим

$$(1+b_1/4)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)\leq a_5\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2,\ \ k\geq 0.$$

Это неравенство в обозначении из п.2 запишется в форме

$$\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q^2\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k),\ k\geq 0, \tag{5.8}$$

где $q^2=a_5/(1+b_1/4)<(6/5+\alpha/2+\beta\gamma_1/2-L\beta\gamma_2/5)/(5/4-L^0\lambda/4)$. В силу (5.8), в обозначениях метрики из п.2, имеют место неравенства

$$\rho(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\leq q\rho(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\leq ...\leq q^{k+1}\rho(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0),$$

где $0<q<1$ при $a_5>0$, $b_1>0$, $5L^0\lambda+10\alpha+10\beta\gamma_1<1+4L\beta\gamma_2$. Оценка (5.2) получена.
Теорема 2 доказана.

6. Сходимость метода (3.2)

Далее рассмотрим новый метод (3.2), предпочтительный для решения задачи (1.1) в случае овражности функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ по обоим переменным. О сходимости метода (3.2) для выпукло-вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$ имеет место

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения а)–г) из п.1 и параметры метода (3.2) таковы, что*

$$\begin{gathered}
0<\alpha<1/5,\ 0<\gamma_1<\gamma_1^0,\ 0<\beta<(2-5\alpha)/(11\gamma_1+2Ld\gamma_2), d=1-5\alpha^2 \\
0<\gamma_2<(4-15\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha d),\ 0<\lambda<\alpha/\gamma_1,\ L/2<L^0<3L/2.
\end{gathered} \tag{6.1}$$

Тогда найдётся седловая точка $(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*)\in Q_*\times U_*$ *функции* $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{u})$, *такая, что процесс (3.2), (6.1) по норме пространства* $E^n\times E^m$ *к ней сходится, то есть* $\left\{\mathbf{x}^k\right\}\to\mathbf{x}^*\in Q_*$, $\left\{\mathbf{u}^k\right\}\to\mathbf{u}^*\in U_*$ *при* $k\to\infty$ *для всех* $(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0)\in E^{n+m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим каждое уравнение из (3.2) в виде вариационного неравенства, тогда этот итерационный процесс запишется в форме:

$$\begin{gathered}
\left(\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k-\alpha\mathbf{y}^k,\mathbf{v}-\mathbf{z}^k\right)\geq 0, \\
\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k-\beta\gamma_1\mathbf{y}^k+\beta\gamma_2\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k,\mathbf{u}^k),\mathbf{v}-\mathbf{x}^{k+1}\right)\geq 0,\ \mathbf{v}\in Q; \\
\left(\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k-\alpha\mathbf{v}^k,\mathbf{u}-\mathbf{w}^k\right)\geq 0,\ \mathbf{u}\in U; \\
\left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k-\lambda\gamma_1\mathbf{v}^k-\lambda\gamma_2\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}-\mathbf{u}^{k+1}\right)\geq 0.
\end{gathered} \tag{6.2}$$

Здесь сначала преобразуем первое и второе неравенства, положив $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$ и $\mathbf{v}=\mathbf{x}^*$ соответственно, пользуясь свойствами скалярного произведения, (3.2), неравенством

Коши-Буняковского и нерасширяющим свойством оператора проектирования ([10], с. 190). Аналогично проведённому в теореме 1, из первого неравенства получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|^2 \le \alpha\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\right) \le \alpha\|\mathbf{y}^k\|\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\| = \\ = \alpha\|\mathbf{y}^k\|\|P_Q\left(\mathbf{x}^k+\alpha\mathbf{y}^k\right)-P_Q(\mathbf{x}^k)\| \le \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2.\end{gathered} \tag{6.3}$$

а из второго неравенства (6.2) получим неравенство, совпадающее с (4.17),

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2,\ k\ge 0,\end{gathered} \tag{6.4}$$

где $a_1 = 4(1-L\beta\gamma_2)/5-\beta\gamma_1/3 > 0$ при $0<\beta<4/(5\gamma_1/3+4L\gamma_2)=\beta^{31}<1/(L\gamma_2)$, $\gamma_2<\gamma_1/(4L\alpha^2)=\gamma_2^{31}$; $a_2=\alpha+\beta\gamma_1$, $a_3=1+a_2$, $a_4=2\alpha+4\beta\gamma_1-4L\alpha^2\beta\gamma_2$.

Далее будем анализировать третье и четвёртое неравенства из (6.2). Из третьего неравенства (6.2), положив $\mathbf{u}=\mathbf{u}^k$, вычислениями, аналогичными проведённым при получении неравенства (6.3), получим:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\|^2 \le \alpha\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\right) \le \alpha\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^k\| = \\ = \alpha\|\mathbf{v}^k\|\|P_Q\left(\mathbf{u}^k+\alpha\mathbf{v}^k\right)-P_Q(\mathbf{u}^k)\| \le \alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Из четвёртого неравенства (6.2) при $\mathbf{u}=\mathbf{u}^*$ следует:

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)+\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)- \\ -\lambda\gamma_2\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\ge 0,\ k\ge 0.\end{gathered} \tag{6.6}$$

Здесь первое скалярное произведение преобразуем с помощью (3.4),

$$\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\right)=\left(\|\mathbf{u}^*-\mathbf{w}^k\|^2-\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2\right)/2, \tag{6.7}$$

а скалярное произведение в третьем слагаемом в (6.6) представим в виде суммы

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)= \\ \left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{w}^k\right)+\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^{k+1}\right),\end{gathered}$$

перенесём в правую часть (6.6) и каждое слагаемое оценим аналогично тому, как это было сделано при выводе неравенства (4.17). Тогда

$$\begin{gathered}\left(\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k),\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\right)\ge\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k)+ \\ +\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{w}^k)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})-L^0\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2/2,\end{gathered}$$

где в силу (1.1) $\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^*)-\varphi(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\ge 0$. С учётом этой оценки, (3.2) и (6.7), неравенство (6.6) запишется в форме

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^*-\mathbf{u}^{k+1}\|^2+(1-L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{w}^k\|^2+ \\ +2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k,\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\right)\le\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered}$$

Его правая часть преобразуется с помощью нерасширяющего свойства оператора проектирования и (3.4):

$$\begin{gathered}\|\mathbf{w}^k-\mathbf{u}^*\|^2=\|P_U(\mathbf{u}^k+\alpha\mathbf{v}^k)-P_U(\mathbf{u}^*)\|^2\le\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*+\alpha\mathbf{v}^k\|^2= \\ =\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+2\alpha\left(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^k\right)+\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2,\end{gathered}$$

скалярное произведение оценивается по (3.4),

$$2\alpha\left(\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*,\mathbf{v}^k\right)=\alpha\left(\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+\|\mathbf{v}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2\right),$$

поэтому $\|\mathbf{w}^k - \mathbf{u}^*\|^2 \le (1+\alpha)\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + (\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2$, $k \ge 0$. Тогда основное неравенство запишется в виде

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k+1}\|^2 + (1 - L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 + 2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\right) \le \\ \le (1+\alpha)\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + (\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2,\ k \ge 0.\end{gathered} \tag{6.8}$$

В (6.8) третье слагаемое в левой части представим в виде суммы

$$2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\right) = \lambda\gamma_1\left[-2(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^k) - 2(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k)\right],$$

затем оценим с помощью неравенства (3.7) при $\varepsilon = 1$ и равенства (3.4):

$$\begin{gathered}-2(\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}^k) \ge -\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 - \|\mathbf{v}^k\|^2; \\ -2(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) = \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k\|^2 + \|\mathbf{v}^k\|^2 - \|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{k-1}\|^2.\end{gathered}$$

Тогда $2\lambda\gamma_1\left(\mathbf{v}^k, \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\right) \ge \lambda\gamma_1\left(\|\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k\|^2 - \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 - \|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2\right)$. Подставив эту оценку в левую часть (6.8), придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + (1 - L^0\lambda\gamma_2)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 - \lambda\gamma_1\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + \\ (\alpha - \lambda\gamma_1)\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \le (1 + \alpha - \lambda\gamma_1)\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + \\ +(\alpha+\alpha^2)\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k \ge 0.\end{gathered} \tag{6.9}$$

Здесь оценим второе слагаемое в левой части. С помощью левого неравенства (3.3) и нерасширяющего свойства оператора проектирования ([10], с. 190) имеем

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{u}^k - \mathbf{w}^k\|^2, \\ \varepsilon > 0,\ \|\mathbf{u}^k - \mathbf{w}^k\|^2 \ge \alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2, \\ \varepsilon = 1/5:\ \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^k\|^2 \ge (4/5)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 - 4\alpha^2\|\mathbf{v}^k\|^2.\end{gathered}$$

С учётом этой оценки (6.9) примет вид

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \le \\ \le b_{33}\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + b_{34}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k \ge 0,\end{gathered} \tag{6.10}$$

где $b_{31} = 4(1 - L^0\lambda\gamma_2)/5 - \lambda\gamma_1 > 0$ при $\lambda < 4/(5\gamma_1 + 4L^0\gamma_2) = \lambda^{31} < 1/(L^0\gamma_2)$; $b_{32} = \alpha - \lambda\gamma_1 > 0$ при $0 < \lambda < \alpha/\gamma_1 = \lambda^{32} < \lambda^{31}$, $\gamma_2 < (4 - 5\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha) = \gamma_2^{31}$; $b_{33} = 1 + b_{32}$; $b_{34} = 2\alpha - 4L^0\alpha^2\lambda\gamma_2 > 0$, $\lambda < \lambda^{32} < 1/(2L^0\alpha\gamma_2)$, $\gamma_2 < \gamma_2^{31} < \gamma_1/(2L^0\alpha^2)$.

Сложив неравенства (6.4) и (6.10), получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ +b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \le \\ \le a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{33}\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2 + b_{34}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k \ge 0.\end{gathered} \tag{6.11}$$

Далее просуммируем (6.11) от $k = 0$ до $k = m$, $m \ge 1$, тогда

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + b_{31}\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m\|^2 + \\ \sum_{k=0}^{k=m-1}\left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b34)\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right] \le \\ \le a_2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^*\|^2 + \\ +(1 - a_2)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - b_{32})\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2,\end{gathered} \tag{6.12}$$

где первые две слагаемые в правой части преобразуем с помощью правого неравенства (3.3) при $\varepsilon = 1$, $a_2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^*\|^2 \le 2a_2\left(\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^m\|^2 + \|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2\right) + 2b_{32}\left(\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m\|^2 + \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2\right)$; тогда при $a_1 - 2a_2 > a_1 - a_4 > 0$ из (6.12) следует

$$\begin{gathered}(1 - 2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - 2b_{32})\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 + \\ +\sum_{k=0}^{k=m}\left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right] \le \\ \le (1 - a_2)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + (1 - b_{32})\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2,\end{gathered} \tag{6.13}$$

где $0 < \beta \le (2-5\alpha)/(11\gamma_1 + 2Ld\gamma_2) < \beta^{31}$, $d = 1 - 5\alpha^2$; $b_{31} - 2b_{32} > b_{31} - b_{34} > 0$ при $0 < \gamma_2 < (4-15\alpha)\gamma_1/(4L^0\alpha d) < \gamma_2^{31}$, $0 < \lambda < \lambda^{32} < (4-10\alpha)/(5\gamma_1 + 4L^0 d\gamma_2)$, $0 < \alpha < 4/15$.

Отсюда при $m \to \infty$ следует сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right].$$

Следовательно, для (6.13) имеем: $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \to 0$, $\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| \to 0$, $k \to \infty$, последовательность $\left\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\right\}$ невозрастающая, последовательность $\left\{\mathbf{x}^k; \mathbf{u}^k\right\}$ ограничена; (6.13) эквивалентно неравенству

$$(1-2a_2)\|\mathbf{x}^{m+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (1-2b_{32})\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^*\|^2 \le (1-a_2)\|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|^2 + (1-b_{32})\|\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*\|^2$$

и, по теореме Больцано-Вейерштрасса, существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{\mathbf{x}^{k_i}; \mathbf{u}^{k_i}\right\} \to (\mathbf{x}^*; \mathbf{u}^*)$, $k_i \to \infty$ и

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^*\| \to 0,\ k_i \to \infty, \\ \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i+1}\| + \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i+1}\| \to 0,\ k_i \to \infty. \end{gathered} \tag{6.14}$$

Тогда в пределе при $k \to \infty$ из второго и четвёртого уравнений (3.2) следуют равенства

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \beta\gamma_2\nabla\varphi_x(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right],\ \mathbf{u}^* = P_U\left[\mathbf{u}^* + \lambda\gamma_2\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)\right]$$

(β, γ_2, $\lambda > 0$), эквивалентные характеристике (1.3) седловой точки в терминах оператора проектирования; следовательно, $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ – седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, то есть решение задачи (1.1).

Положим $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$, выберем $\forall \varepsilon > 0$ и числа $k_{i_0} = r$ и $m > r$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k_i} - \mathbf{x}^{k_i-1}\|^2 \le \varepsilon/(4a_4 + 4a_2),\ \|\mathbf{u}^{k_i} - \mathbf{u}^{k_i-1}\|^2 \le \varepsilon/(4b_{34} + 4b_{32}), \\ \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 < \varepsilon/(4 - 2a_2),\ \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2 < \varepsilon/(4 - 2b_{32}), \end{gathered} \tag{6.15}$$

Просуммируем (6.11) от $k = m$ до $k = N$ при $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^e$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^e$, $N > m > r$:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^e\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^N\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^e\|^2 + b_{31}\|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^N\|^2 + \\ +a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^e\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^e\|^2 + \\ +\textstyle\sum_{k=r}^{k=N-1}\left[(a_1 - a_4)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_{31} - b_{34})\|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\|^2\right] \le \\ \le \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2 + \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2 + +a_2\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^e\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^e\|^2 + \\ +a_4\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}\|^2 + b_{34}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}\|^2. \end{gathered} \tag{6.16}$$

Здесь для третьего и четвёртого слагаемых в правой части воспользуемся неравенствами

$$\begin{gathered} a_2\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^e\|^2 \le 2a_2\left(\|\mathbf{x}^N - \mathbf{x}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{x}^{N+1} - \mathbf{x}^e\|^2\right), \\ b_{32}\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^e\|^2 \le 2b_{32}\left(\|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}^{N+1}\|^2 + \|\mathbf{u}^{N+1} - \mathbf{u}^e\|^2\right), \end{gathered}$$

пятое и шестое слагаемые в левой части (6.16) преобразуем с помощью левого неравенства (3.3) при $\varepsilon = 2$:

$$\begin{gathered} a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^e\|^2 \ge -a_2\|\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^m\|^2 + a_2\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^e\|^2/2, \\ b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^e\|^2 \ge -b_{32}\|\mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}^m\|^2 + b_{32}\|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^e\|^2/2. \end{gathered}$$

Учитывая эти оценки и неравенства $a_1 - 2a_2 > a_1 - a_4 > 0$, $b_{31} - 2b_{32} > b_{31} - b_{34} > 0$, верные при условиях (6.1), из (6.16) с учётом (6.14), (6.15) и рассуждений и выкладок после (6.13), получим:

$$\begin{gathered}(1+2a_2)\|\mathbf{x}^{N+1}-\mathbf{x}^e\|^2 + a_1\|\mathbf{x}^{N+1}-\mathbf{x}^N\|^2 + (1-2b_{32})\|\mathbf{u}^{N+1}-\mathbf{u}^e\|^2 \le \\ \le (1-a_2/2)\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^e\|^2 + (1-b_{32}/2)\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^e\|^2 + a_{35}\|\mathbf{x}^m-\mathbf{x}^{m-1}\|^2 + \\ +b_{35}\|\mathbf{u}^m-\mathbf{u}^{m-1}\|^2 \le \varepsilon,\end{gathered}$$

где $a_{35} = a_4 + a_2$, $b_{35} = b_{34} + b_{32}$. Это неравенство означает фундаментальность последовательности $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$. Отсюда следует сходимость из любой начальной точки всей последовательности $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ к седловой точке задачи (1.1), то есть $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\} \to (\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$, $k \to \infty$, ибо пространство E^{n+m} полное, неравенства (6.13) выполняются для седловой точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) \in Q_* \times U_*$ и последовательность $\{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2\}$ монотонна и ограничена.

Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. *В силу теоремы 3 верны все неравенства из следствия теоремы 1.*

7. Оценка скорости сходимости метода (3.2)

Получим оценку скорости сходимости метода (3.2), (6.1) для выпукло вогнутой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, при дополнительном ограничении и требованиях к параметрам.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, включая (6.1) и, кроме того: 1) выполнены неравенства (3.10в); 2) параметры метода и функции таковы:*

$$\begin{gathered}0 < \alpha \le 1/6,\ 0 < \beta \le h\lambda/(5\gamma_1 + 12L\gamma_2);\ 3/5 < 2L/3 < L^0 < 6L/5; \\ 0 < \lambda < e(5\gamma_1 + 12L\gamma_2)/(hr);\ 0 < \gamma_2 < 7e\gamma_1/(8L^0); \\ e = 1 - 6\alpha;\ h = 15\gamma_1 + 12L^0\gamma_2;\ r = 21\gamma_1/2 + Ld\gamma_2;\ d = 1 - 8\alpha^2.\end{gathered} \tag{7.1}$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k\}$ *метода (3.2), (6.1) сходится к некоторой седловой точке* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ *задачи (1.1) со скоростью геометрической прогрессии с оценкой*

$$\rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k) \le q^k \rho(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0), \tag{7.2}$$

где $0 < q < \{[(19/3 + 2.5\alpha + \beta(2\gamma_1 - 4L\gamma_2/3)]/(17 - h\lambda)\}^{1/2} < 1$, *при условиях (7.1) на параметры.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в условиях теоремы 4 неравенство (6.11) справедливо. Для получения оценки (7.2) сначала воспользуемся левым неравенством (3.3) и выведем неравенство $\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^*\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|\mathbf{v}^k\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^*\|^2$. Положим в нём и в (4.19) $\varepsilon = 2$, получим два неравенства:

$$\begin{gathered}\|\mathbf{u}^{k-1}-\mathbf{u}^*\|^2 \ge -\|\mathbf{v}^k\|^2 + 0.5\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2, \\ \|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2 \ge -\|\mathbf{y}^k\|^2 + 0.5\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2.\end{gathered} \tag{7.3}$$

Чтобы оценить $3/8$ часть третьего слагаемого в левой части (6.11), в (3.7) положим $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\varepsilon = 9$, затем умножим на $3a_1/8$. Тогда получим

$$(3a_1/8)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \ge 3a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 + (a_1/3)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2. \tag{7.4}$$

Положив в (3.7) $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{u}^k$, $\varepsilon = 9$ и умножив на $3b_{31}/8$, для четвёртого слагаемого в левой части (6.11) получим оценку

$$(3b_{31}/8)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2 \ge 3b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2 + (b_{31}/3)\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2. \tag{7.5}$$

После подстановки оценок (7.3), (7.4), (7.5) в (6.11), придём к неравенству

$$\begin{gathered}(1+3a_1)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+(1+3b_{31})\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2+\\ +5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8\le\\ \le a_{43}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_{43}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2+a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2+b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered}\tag{7.6}$$

где $a_{43}=a_3-a_2/2+a_1/3<19/15+\alpha/2+2\beta\gamma_1/5-4L\beta\gamma_2/15$; $a_{44}=a_4+a_2=3\alpha+\beta(5\gamma_1-4L\alpha^2\gamma_2)>3\alpha>0$, $b_{43}=b_{33}-b_{32}/2+b_{31}/3=19/15+\alpha/2-5\lambda\gamma_1/6-4L^0\lambda\gamma_2/15$; $b_{44}=b_{34}+b_{32}=3\alpha-\lambda\gamma_1-4L^0\alpha^2\lambda\gamma_2$; $a_{43}>19/15+\alpha/2$ и $b_{43}>0$ при $\gamma_2<(35\gamma_1)/(24L)=\gamma_2^{41}$ и $\lambda\le(19+8\alpha)/(14\gamma_1+4L^0\gamma_2)=\lambda^{41}$.

Далее покажем, что

$$\begin{gathered}a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8\le 0,\\ b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8\le 0.\end{gathered}\tag{7.7}$$

Для доказательства заметим, что в силу следствия теоремы 3

$$\|\mathbf{y}^k\|^2\ge\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2,\ \|\mathbf{v}^k\|^2\ge\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2.\tag{7.8}$$

Пользуясь первым неравенством (7.8), неравенствами $a_{44}-5a_1/8<3\alpha-1/2+\beta(21\gamma_1/4+L\gamma_2/2-4L\alpha^2\gamma_2)<0$ (при $0<\alpha<1/6$, $\beta<e/r=\beta^{41}$, $r>0$, $d=1-8\alpha^2>0$), $5a_1/8\ge a_{44}-5a_1/8$, $(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\ge 0$, верными при условиях (7.1), получим первое утверждение из (7.7):

$$\begin{gathered}0\ge(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{y}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2\right)=a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-\\ -a_{44}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+(5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\ge\\ \ge a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8+(a_{44}-5a_1/8)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right)\ge\\ \ge a_{44}\|\mathbf{y}^k\|^2-5a_1\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/8.\end{gathered}$$

В силу второго неравенства (7.8) и $b_{44}-5a_1/8=3\alpha-1/2-3\gamma_1\lambda/8+L^0d\gamma_2\lambda/2<-3\gamma_1\lambda/8<0$ (при $\lambda<e/(L^0d\gamma_2)=\lambda^{42}$, $3/4\le 2L/3<L^0<6L/5$, $\lambda<\lambda^{41}<\lambda^{42}$, $\gamma_2<\gamma_2^{42}=7e\gamma_1/(8L^0)<\gamma_2^{41}$), $5b_{31}/8\ge b_{44}-5b_{31}/8$, $(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{v}^k\|^2\right)\ge 0$, получим вторую оценку (7.7):

$$\begin{gathered}0\ge(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{v}^k\|^2-\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2\right)\ge b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-\\ -(5b_{31}/8)\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2+(b_{44}-5b_{31}/8)\left(\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2-\|\mathbf{v}^k\|^2\right)\ge\\ \ge b_{44}\|\mathbf{v}^k\|^2-5b_{31}\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^k\|^2/8.\end{gathered}$$

Подставим оценки (7.7) в (7.6), тогда

$$\begin{gathered}(1+3a_1)\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2+(1+3b_{31})\|\mathbf{u}^{k+1}-\mathbf{u}^*\|^2\right)\le\\ \le a_{43}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2+b_{43}\|\mathbf{u}^k-\mathbf{u}^*\|^2,\ k\ge 0.\end{gathered}\tag{7.9}$$

Учитывая, что $(1+3a_1)\ge(1+3b_{31})$ (при $\beta\le h\lambda/(5\gamma_1+12L\gamma_2)=\beta^{42}<\beta^{41}$, $0<\lambda<\lambda^{43}=e(5\gamma_1+12L\gamma_2)/(hr)<\lambda^{41}$); $b_{43}<a_{43}$ (при $0<\gamma_2<\gamma_2^{41}$), в обозначениях п.2 из (7.9) получаем $(1+3b_{31})\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\le a_{43}\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)$, то есть

$$\rho^2(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\le q^2\rho^2(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k),k\ge 0,$$

где $0<q^2<[19/3+2.5\alpha+\beta(2\gamma_1-4L\gamma_2/3)]/(17-h\lambda)$. Тогда имеем

$$\rho(\mathbf{x}^{k+1},\mathbf{u}^{k+1})\le q\rho(\mathbf{x}^k,\mathbf{u}^k)\le\ldots\le q^{k+1}\rho(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}^0),\tag{7.10}$$

где $q = [a_{43}/(1+3b_{31})]^{1/2}$, $0 < q < 1$, $0 < \beta < \beta^{42} < (32 - 8\alpha - 3h\lambda)/(6\gamma_1 - 4L\gamma_2)$, $\lambda < [(32-8\alpha)/(5\gamma_1 + 12L\gamma_2)]/[h(21\gamma_1 + 32L\gamma_2)] = \lambda^{44}$, $0 < \lambda < \lambda^{43} < \lambda^{44} < 17/h$, $0 < \gamma_2 < \gamma_2^{41}$. Из (7.10) следует оценка (7.2).

Теорема 4 доказана.

Примечание 3. Представляют интерес модификации метода (3.2), со свойствами, не худшими свойств методов (3.1) и (3.2). Это четырёхпараметрический метод

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right],\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_k \mathbf{v}^k\right], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k)\right)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U\left[\mathbf{w}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{v}^k + \gamma_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\right)\right],\ k \ge 0, \end{aligned} \tag{7.11}$$

и метод с восемью параметрами

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^k &= P_Q\left[\mathbf{x}^k + \alpha_{1k} \mathbf{y}^k\right],\ \mathbf{w}^k = P_U\left[\mathbf{u}^k + \alpha_{2k} \mathbf{v}^k\right], \\ \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k\left(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla\varphi_x(\mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k)\right)\right], \\ \mathbf{u}^{k+1} &= P_U\left[\mathbf{w}^k + \lambda_k\left(\delta_{1k}\mathbf{v}^k + \delta_{2k}\nabla\varphi_u(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{w}^k)\right)\right],\ k \ge 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Эти методы благоприятны для решения задачи (1.1) в случае, когда функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ имеет овражные свойства по переменным $\mathbf{x} \in Q \subset E^n$ и $\mathbf{u} \in U \subset E^m$.

Список литературы

1. Демьянов В. Ф., Певный А. Б., "Численные методы решения седловых задач", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **12**:5 (1972), 1099–1127.

2. Корпелевич Г. М., "Экстраградиентный метод для седловых и других задач", *Экон. и матем. методы*, **12**:4 (1976), 747–756.

3. Антипин А. С., "Об одном методе отыскания седловой точки модифицированной функции Лагранжа", *Экон. и матем. методы.*, **13**:3 (1977), 560–565.

4. Гольштейн Е. Г., "О сходимости градиентного метода отыскания седловых точек модифицированной функции Лагранжа", *Экон. и матем. методы*, **13**:2 (1977), 322–329.

5. Антипин А. С., *Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа*, ВНИИ системн. исследований, М., 1979, 74 с.

6. Корпелевич Г. М., "Экстраполяционные градиентные методы и их связь с модифицированными функциями Лагранжа", *Экон. и матем. методы*, **19**:4 (1983), 694–703.

7. Антипин А. С., "Градиентные и проксимальные управляемые процессы", *Вопросы кибернетики. Анализ больших систем*, 1992, № 178, 32 – 67.

8. Антипин А. С., *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном и равновесном программировании*, Изд-во ВЦ РАН, М., 2002, 131 с.

9. Малинов В. Г., "Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **36**:12 (1996), 48–56.

10. Васильев Ф. П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988, 552 с.

11. Карманов В. Г., *Математическое программирование*, Наука, М., 1986, 288 с.

12. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977, 744 с.

13. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Специальный курс*, Физматлит, М., 1960, 388 с.

Projection generalized two-step extragradient methods for equilibrium problems

© **V.G. Malinov** [2]

Abstract. Projection generalized two-step extragradient methods for solving of equilibrium programming problems are proposed whereby the saddle points are found on convex-concave continuously differentiable function with Lipschitz gradients specified on subset of the Euclidean space. For two methods the convergence and rate of convergence of the method are studied with the aid of tools from convex analysis, without requirement of strongly convexity or strongly monotony.
Key Words: convex concave function, equilibrium problem, projection generalized two-step extragradient methods.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.