

УДК 51.7:532.546

Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха

© Л.В. Клочкова¹, Ю.Н. Орлов², В.Ф. Тишкин³

Аннотация. В работе изложена оригинальная модель авторов процесса распространения инфекции воздушно — капельным путём и рассмотрены предпосылки для создания эпидемической обстановки в крупных городах.

Ключевые слова: математическое моделирование, модель распространения гриппа, программные комплексы.

1. Введение

Успехи цивилизации, научно–технический прогресс, достижения медицины, к сожалению, на данный момент не привели к снижению инфекционных и неинфекционных болезней среди населения планеты. Более того, растет число онкологических, сердечно — сосудистых, респираторных, эндокринных заболеваний, нервно–психических расстройств. Появилась группа новых, так называемых эмерджентных инфекций, в том числе СПИД, парентеральные гепатиты и другие. Одной из причин такого положения является снижение коллективной резистентности населения планеты в результате глобального неблагоприятного воздействия на организм человека социальных (недостаточное и неполноценное питание), экологических (загрязнение атмосферы и окружающей среды техногенными факторами), медицинских (неоправданное применение некоторых лекарственных средств, наркотиков, алкоголя, стресс и др.) факторов. Все эти причины отрицательно влияют на иммунную систему, вызывают иммунодефициты.

На примере такого актуального в настоящий момент заболевания как грипп можно проследить влияние всех неблагоприятных факторов, которые связаны с развитием мегаполисов. В ходе изучения эпидемий гриппа XX века была выявлена зависимость уровня заболеваемости населения гриппом от его численности. Наибольшая эпидемическая заболеваемость отмечается в городах с населением в 1 млн. человек и больше, что составляет 11.3% всех случаев гриппа на территории страны. В городах с населением от 500 тысяч до 1 млн. человек эта цифра составляет 10.9%, а с населением меньше 500 тысяч — уже 9.7%.

2. Модели распространения гриппа

Грипп передается воздушно–капельным путем и чрезвычайно контагиозен. Некоторые модели предполагают, что дальность рассеивания вируса не превышает 2–3 метра. Непосредственно вокруг больного образуется зараженная зона с максимальной концентрацией

¹ Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

² Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

³ Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

мелкодисперстных аэрозольных частиц. Частицы размером 100 мкм и более (крупнодисперсная фаза) быстро оседают. При прямом контакте с источником инфекции в зараженной зоне вирусные частицы аспирируются и задерживаются на эпителии дыхательных путей восприимчивого организма.

Инкубационный период болезни (E) в среднем составляет 2 суток, инфекционный (лихорадочный) период (Y) продолжается 2–4 дня, и заболевание заканчивается в течение 8–10 дней. Эта эмпирическая модель эпидемии гриппа отражает динамику развития эпидемии среди населения города при непрерывном заражении контактирующих лиц за счет воздушно-капельного механизма. Соотношения построенной на её основе математической модели в [1] представляют систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. При этом учитывается:

1. Число восприимчивых лиц $X(t)$ среди населения города с начальным условием: $X(t_0) = (1 - \alpha)P(t_0)$.
2. Число лиц в инкубационном периоде гриппа $Y(t)$ с начальным условием, определяемом предысторией эпидемии на ее начало.
3. Число новых случаев заболевания гриппом.
4. Число лиц с различными клиническими формами гриппа с начальным условием — предыстории эпидемии на ее начало.
5. Число невосприимчивых лиц или лиц, переболевших гриппом $Z_r(t)$: с начальным условием: $Z_r(t_0) = Z_{r0} = P(t_0)$.
6. Число лиц, погибших от осложнений $Z_f(t)$ с начальным условием: $Z_f(t_0) = 0$.
7. Граничные условия эпидемии (процесс заражения).

По такой компьютерной модели промоделировано развитие эпидемической ситуации в гипотетическом городе с населением в 1 млн. человек, при числе восприимчивых порядка 60 % (600 тысяч человек) и с летальностью около 1 % от числа больных гриппом. Вычислительные эксперименты показали, что эпидемия гриппа в этом городе продлится около 2.5 месяцев, при этом гриппом переболеет 534 тысяч человек. Пик эпидемии придется на 43 день и составит 36 тысяч человек. От гриппа в городе может погибнуть до 5.4 тысяч человек.

Уже эта модель отражает зависимость состояния качества жизни от процессов, связанных с развитием цивилизации и технического прогресса. Однако она очень угрожающая.

Высокая популяционная плотность в близко расположенных общественных местах и домах создают «благоприятные» условия для развития так называемого «эпизоотического процесса». Здесь могут возникать похожие на «эпизоотии у животных» вспышки высоко патогенного гриппа, включая эмерджентные инфекции. Вычислительные эксперименты по такой модели приведут к ещё более катастрофическим последствиям.

Наибольший интерес для эпидемиологов представляют вычислительные эксперименты с математической моделью процессов распространения гриппа на территории крупных городов страны, связанных между собой транспортной сетью (например, гражданская авиация), т.е. модель эпидемии гриппа на территории страны. Эта модель должна отражать процесс одновременного распространения гриппа среди населения нескольких городов страны. За счет непрерывного движения источников инфекции (лиц в инкубационном периоде) возможны новые случаи заражения лиц из группы риска $X(t)$ в каждом городе.

Очевидно, что в каждом случае сформируется своя «локальная» эпидемия, которая будет «подпитывать» другие города за счет постоянной миграции населения между ними. Движение гриппозной инфекции по системе « n » городов страны, как правило, начинается с некоторого исходного пункта, куда она ранее была занесена извне (очаг инфекции на сопредельной территории). Предполагается, что именно в этом городе появились первые больные лица в инкубационном периоде и инфекционные больные, которые затем вызвали «локальную» эпидемию. Вместе с тем, за счет миграции населения по системе городов страны эта «локальная» эпидемия дает движение патогена в другие города, где формируются свои «локальные» эпидемии. Математическая модель крупномасштабной эпидемии гриппа в системе из « n » городов имеет вид уже суперсистемы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. И тогда не минуемо (по такой модели) должна разразиться полная экологическая катастрофа во всем мире. Сообразно такой модели к этому моменту должно было бы переболеть не менее 150 миллионов человек в одной только России так называемым птичьим гриппом.

Для конкретного примера развития эпидемической обстановки в городе авторами разрабатывается модель распространения капельно-воздушной инфекции (КВИ): более прагматичная, не столь угрожающая катастрофическими последствиями. Она основана на транспортно диффузионной системе уравнений, учитывает плотность населения и множественность очагов начала развития эпидемий, но предоставляет возможность выработки рекомендаций для управления процессом. Основная идея заключается в том, что необходимо следить за качеством воздуха в местах скопления людей, а не строить парные взаимодействия людей как при СПИДе.

Модель представляет собой визуально-прогностический программный комплекс для исследования процессов распространения и зон заражения при действии источников инфекции. Она позволяет прогнозировать распределение больных людей, представляющих собой источник дальнейшего распространения инфекции, по территории проживания, очерчивать зоны эпидемий во времени и пространстве средствами математического и компьютерного моделирования и выводить общее количество больных людей в этой зоне на данный момент времени.

Модель КВИ обеспечивает решение системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, ввод исходных данных в расчетный модуль и вывод полученных результатов в виде виртуальной картины развития ситуации.

Решение системы уравнений «Модели» проводят с помощью численных методов на основе разностных аналогов дифференциальных уравнений для расчетной сетки.

«Модель» предоставляет пользователям возможность:

- прогноза распространения инфекций по территории проживания;
- получения прогностических карт распространения эпидемий.

В соответствии со своим назначением модель реализует следующие функции:

- обеспечивает расчетные и игровые варианты моделирования;
- обеспечивает представление расчетной информации пользователям в графической форме.

При известной эмиссии инфекции в центре моделируемой области с определённой плотностью населения, а также некоторых других известных медико-биологических величинах, можно определить границы участков с эпидемической обстановкой во времени и пространстве и количество больных людей.

Модель КВИ представлена системой эволюционных уравнений, описывающей процес-

сы распространения капельно-воздушной инфекции в виде примеси

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} X) + rX(1 - b - m - n - p) + \\ \qquad \qquad \qquad + \operatorname{div} \vec{w} X + X_0(x_0, y_0, t_0); \quad c(x, y, z, t) \geq c_b, \\ X = 0, \quad c(x, y, z, t) < c_b, \end{cases}$$

где $X = AN(x, y)c(x, y, z, t)$ — плотность больных в зонах инфицирования; $N(x, y)$ — плотность населения; $c(x, y, z, t)$ — концентрация инфицирующих бактерий в воздухе, причем если $c(x, y, t) = c_b$ (граничное значение инфицирующей концентрации бактерий), то в точке (x, y, t) начинаются заболевания обыкновенных людей, иммунитет которых типичен для данного момента (появляется некоторая плотность больных людей), если $c(x, y, t) < c_b$, то в точке (x, y, t) новых заболевших людей нет; A — медико-биологический когнитивный коэффициент, характеризующий специфику данного вида инфекции; K — некоторый когнитивный коэффициент, зависящий от принятых допущений при рассмотрении процессов (в частности, это может быть коэффициент горизонтальной диффузии инфекции, если описывается процесс распространения инфекции в турбулентном поле атмосферы) и характеризующий скорость изменения градиента плотности больных; r — некоторый когнитивный медико-биологический коэффициент, характеризующий интенсивность эволюционного нарастания или убывания (наличие источников или стоков) концентрации инфекции от больных людей; $b(x, y, t)$, $m(x, y, t)$ и $n(x, y, t)$ — доли X , изменяющие на данный момент в точке (x, y, t) плотность больных людей: $b(x, y, t)$ — доля X людей, у которых инкубационный период развития болезни (они ещё не заражаются), $m(x, y, t)$ — доля X выздоравливающих людей благодаря собственным защитным силам (иммунитету) организма, $n(x, y, t)$ — доля X людей, ускоренно выздоравливающих благодаря принятым мерам борьбы с эпидемией, включая изоляцию больных, p — доля X , уменьшающая число новых больных и концентрацию вирусов из-за гибели инфекции в результате воздействия климатических условий (мороз, жара и т.п.) и конечной жизни вирусов; \vec{w} — усреднённая скорость адвективного перемещения больных людей в определённом направлении или скорость перемещения инфекции в поле ветра на открытом воздухе в толпе людей; $X_0(x_0, y_0, t_0)$ — начальное значение плотности больных в точке (x_0, y_0) с начальной концентрацией c_0 :

$$X_0(x, y, t) = \begin{cases} X_0 \leq N(x_0, y_0); & t_0 = 0, \quad x = x_0, \quad y = y_0; \\ 0; & t \neq 0, \quad \text{or } x \neq x_0, \quad \text{or } y \neq y_0. \end{cases}$$

Если $X(x, y, t) \geq N(x, y)$, то полагается значение $X(x, y, t) = N(x, y)$. Результат счёта может быть представлен как изолинии, соответствующие 20 % заболевших от общего числа людей, или как число заболевших в эпидемической зоне.

Диффузия инфекции в пространстве может моделироваться по-разному в зависимости от рассматриваемых областей. Если рассматриваются процессы распространения на открытом воздухе, то инфицирование можно моделировать как распространение вирусов в поле ветра. Тогда значения коэффициента горизонтальной диффузии вычисляются по формуле $K = \alpha \cdot \sigma_\Theta^2 \cdot \max(0.5, |\vec{w}|) \cdot H$, где σ_Θ — угол горизонтальной флуктуации направления ветра в радианах, \vec{w} — скорость ветра в м/с, H — высота слоя перемешивания в м, зависящая от атмосферной стабильности, α — некоторый эмпирический коэффициент ($\alpha = 0.01$). Оператор задаёт класс атмосферной стабильности по метеосводкам.

Если рассматриваемая область имеет сложную конфигурацию (заражение происходит в основном при близком контакте в зданиях и транспорте), тогда необходимо подбирать некоторый усреднённый коэффициент диффузии, характеризующий скорость распростра-

нения инфекции, например, в городских помещениях. Сейчас в Англии проводится натурный эксперимент, в котором день за днём проводят измерение качества воздуха в вагонах поезда метро, и затем составляется соответствие с наблюдаемой эпидемической обстановкой в городе. Есть факты, что зараженность воздуха в вагонах после присутствия в них больных людей удерживается до четырёх дней. Эти эксперименты могут помочь в определении когнитивных коэффициентов.

3. Методика построения долгосрочного прогнозирования

Научным коллективом представляемой работы предложена также методика построения математического аппарата долгосрочного прогнозирования эпидемической обстановки в мегаполисах. Методические разработки аппарата прогнозирования эпидемической ситуации в мегаполисе (или в регионе) проведены по трем направлениям. Проведена оптимизация скользящих методов анализа нестационарных данных демографического состояния в мегаполисе для проведения корреляционного анализа. Разработан математический аппарат прогнозирования этого временного ряда совместно с его выборочной функцией распределения. Проведён совместный прогноз численности населения и эпидемической ситуации в регионе в зависимости от сценария энергетического развития.

3.1. Оптимизация статистического анализа нестационарных данных

Для прогнозирования взаимосвязи уровня энергопотребления, энергоёмкости внутреннего валового продукта (ВВП), величины загрязнения окружающей среды и роста населения разработаны эконометрические модели, обобщающие методы скользящих средних посредством использования алгоритма определения оптимальной статистической базы. Эти модели используют понятие «горизонтной статистики» (разброса) [3]-[7], выборочное распределение которой является индикатором квазистационарности процесса. Эта статистика позволяет определить характерный горизонт прогноза случайных величин, на котором выборку заданного объема можно считать квазистационарной, а также решить обратную задачу — определить объем выборки, гарантирующий с заданной точностью стационарность случайного процесса на заданном горизонте прогнозирования.

3.2. Прогноз динамики численности населения

Прогноз динамики численности населения в зависимости от уровня энергопотребления, который учитывает в рамках эконометрических моделей зависимость рождаемости, смертности и миграционных потоков от экологического состояния, использует кинетические уравнения для расчета функций распределения населения по социальным и национальным стратам, а также по возрасту и полу. Предметом исследования является нестационарный временной ряд. Под нестационарными временными рядами подразумевают ряды некоторых величин, из которых вычтены все с той или иной точностью детерминированные составляющие. Эти разности слабо коррелируют между собой и представляют ряд случайных величин. Таким образом, целью исследования является метод, позволяющий найти оптимальную величину скользящего окна — ряда из указанных остатков — для построения выборочной функции распределения и её прогнозирования внутри заданного горизонта. После этого можно построить численную реализацию временного ряда. Существует множество временных рядов:

1. с известным распределением (температура в уравнении теплопроводности);

2. с отсутствием тренда;
3. с независимыми приращениями и т.д.

Все приёмы относятся к стационарным временным рядам, когда первые два или конечное число моментов не зависят от времени.

Отличительной особенностью данной работы является обоснованность критерия, с помощью которого можно с заданной точностью осуществить операции с выборками из нестационарного ряда.

Основные задачи, которые решены при разработке данной методики:

1. построение корректной модели прогнозирования нестационарного временного ряда;
2. определение оптимального объёма выборки для формирования квазистационарной выборочной функции распределения (ВФР);
3. минимизация ошибки аппроксимации временного ряда на заданном интервале времени;
4. определение интервала времени, на котором ошибка аппроксимации не превосходит заданную величину;
5. разработка численного алгоритма прогноза временного ряда внутри и вне границ квазистационарности ВФР.

Тогда ряд считается подготовленным. Новым аспектом является установление количественной связи между горизонтом прогноза, объёмом выборки и точностью прогноза для нестационарного временного ряда на основе некоторого интегрального критерия, применяемого не к самому ряду, а к выборочной функции распределения.

4. Заключение

Фундаментальной проблемой XXI века продолжает оставаться более реальное прогнозирование состояния окружающей среды. По оценкам экономистов, даже ограниченные программы стабилизации воздействия на окружающую среду обойдутся в сотни миллиардов долларов. На ученых лежит громадная ответственность за достоверность представляемых ими данных об изменениях в окружающей среде, например, концентрации «парниковых» газов (углекислого газа, метана, окиси азота, хлорфторуглеродов и др.).

По мнению пессимистов, рост численности населения в крупных городах приведет к процессам развития эпидемий подобным эпизоотиям у животных, а с другой стороны к более высоким темпам развития потребления и дальнейшего развития производства. Развитие производства немыслимо без использования природы и её ресурсов. Самое ужасное — это её загрязнение. Загрязнение воздуха и воды приводит к сильному подрыву всей окружающей среды и качества жизни людей. Извлекая для производства ресурсы, в настоящий момент человечество для пользы использует лишь 1 — 2% ресурсов. Остальное идет в отходы, что еще больше ухудшает ситуацию. Это подрывает защитные силы организма.

По мнению оптимистов, такое соотношение извлечения ресурсов и КПД использования зависит от развития науки и техники, а также характера производственных отношений, доминирующих в том или ином сообществе. При правильной политике возможно целенаправленно создавать все предпосылки для того, чтобы забота об улучшении экологии становилась главной движущей силой развития производительных сил общества.

Многие факты (например, [2]) свидетельствуют о том, что с середины XX века начался быстрый рост концентрации углекислого газа в атмосфере и других примесей в окружающей среде техногенного происхождения. При сохранении современных темпов увеличения содержания CO_2 в атмосфере его концентрация к 2030 г. может удвоиться. При этом некоторые ученые выдвигают гипотезы о том, что эта деятельность приведёт к росту приземной температуры воздуха. Однако, за более чем 30 лет наблюдений в ГАИШ МГУ астрофизическим методом было установлено, что с 1969 по 1991 год концентрация CO_2 в Москве повысилась на 45%. С 1991 г. темпы роста количества углекислого газа резко возросли, и к 2000 г. его содержание в атмосфере превысило уровень 1969 г. примерно в 2.5 раза. Основным источником поступления CO_2 в атмосферу Москвы являются автомобили, поэтому резкое возрастание углекислоты совпало с периодом интенсивной автомобилизации Москвы, начавшейся около 1991 г. Но в 2000 — 2003 гг. измерения показали сначала замедление, а затем и прекращение увеличения концентрации CO_2 в атмосфере над городом. Этот результат объясняется замедлением роста автомобильного парка Москвы, его качественными изменениями, а также принятыми Правительством Москвы мерами по совершенствованию транспортной инфраструктуры. Поскольку Москва является типичным мегаполисом, на основании этих результатов исследований был сделан оптимистичный предварительный вывод о том, что глобальное ухудшение качества воздуха, например, в Москве может и закончиться. Однако этот миф был развеян обстановкой в городе летом 2010 года. При определённой частоте повторения подобных погодных условий и продолжительности их воздействия организм человека уже не сможет выдержать существующих условий проживания в городах при таком состоянии атмосферного воздуха из-за удушающих выхлопных газов от автомобилей даже при их постоянном на данный момент количестве и отсутствии тренда нарастания. Ослабление иммунитета неизбежно приводит к катастрофическим последствиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант № 11-01-00444-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боев Б.В., Макаров В.В., “Гео-информационные системы и эпидемии гриппа”, *НИИ эпидемиологии и микробиологии им.Н.Ф.Гамалеи РАМН*, 2011, <http://www.webpticeprom.ru>.
2. Проект, <http://www.nair-it.ru>.
3. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, **20:9** (2008), 23–33.
4. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., “Методика определения оптимального объема выборки для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2008, № 3, 3–13.
5. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., *Кинетические уравнения для прогнозирования нестационарных временных рядов*, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008, 28 с.
6. Орлов Ю.Н., Суслин В.М., *Кинетические уравнения для нестационарных демографических моделей*, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2001, 28 с.

-
7. Орлов Ю. Н., В. М. Суслин В. М., “Кинетические уравнения для некоторых моделей демографии”, *Математическое моделирование*, **15:3** (2003), 43–54.

Mathematical modeling of correlation of the epidemic situation in the metropolitan areas on the air state

© L.V Klochkova⁴, J.H. Orlov⁵, V.F. Tishkin⁶

Abstract. The work describes the Authors original model of the infection spread process by airborne droplets and the necessary conditions for the epidemiological situation creation in large cities.

Key Words: mathematical modeling, model of the spread of influenza, software complexes.

⁴ Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁵ Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

⁶ Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.