УДК 517.938

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере размерности большей трех

© В.З. Гринес[1], Е.Я. Гуревич[2], О.В. Починка,[3]

Аннотация. Работа посвящена решению задачи топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n размерности $n > 3$. В качестве основного инструмента используется схема диффеоморфизма – инвариант, описывающий структуру пространства блуждающих орбит и вложение в него проекций $(n-1)$-мерных сепаратрис седловых периодических точек. Рассматриваемые динамические системы являются моделями ассоциативной памяти (нейронные сети Хопфилда), полученные результаты могут быть использованы в теории распознавания образов.

Ключевые слова: динамические системы, диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, сеть Хопфилда.

1. Введение

Задача топологической классификации динамических систем восходит к работам А.А. Андронова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера и М. Пейшото. А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин в 1937 году вввели понятие грубости динамической системы и показали, что необходимые и достаточные условия грубости потока на плоскости (двумерной сфере) состоят в требовании конечности неблуждающего множества, его гиперболичности и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло. В 1960 году С. Смейл ввел класс динамических систем на многообразиях произвольной размерности, удовлетворяющих аналогичным условиям, при этом условие отсутствия траекторий, идущих из седла в седло, трансформировалось в более общее условие трансверальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит. Такие системы позднее получили название систем Морса-Смейла. Условие конечности множества орбит, составляющих неблуждающее множество систем Морса-Смейла, приводит к идее сведения проблемы топологической классификации этих систем к комбинаторной задаче описания взаимного расположения этих орбит в несущем многообразии. Впервые этот подход был применен Е.А. Леонтович и А.Г. Майером для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий и был развит в работах М. Пейшото, Я.Л. Уманского, С.Ю. Пилюгина, в которых решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а также В.З. Гринесом, А.Н. Безденежных для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит. Как оказалось, эта идея, вообще говоря, не работает в случае диффеоморфизмов на многообразиях размерности 3 из-за существования диффеоморфизмов с дико вложенными инвариантными многообразиями седел. Этот факт потре-

[1] Заведующий кафедрой высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2] Доцент кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; elena _ gurevich@list.ru.

[3] Доцент кафедры теории функций, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

бовал нового языка для получения топологических инвариантов в классе таких систем. Полная топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях получена в цикле работ [1] – [6]. Одним из эффективных топологических инвариантов, введенных в этих работах, оказалась так называемая схема диффеоморфизма, описывающая структуру пространства блуждающих орбит и вложение в него проекций $(n-1)$-мерных сепаратрис седловых периодических точек. В настоящей работе аналогичная техника применяется для решения задачи топологической классификации в множестве G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n>3$. Следует отметить, что изучение диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n>3$ началось в работах [7], [8], где получена топологическая классификация таких систем в предположении, что множество неустойчивых сепаратрис одномерно и не содержит гетероклинических пересечений.

Пусть $f\in G$. Положим $\Omega_f^i=\{p\in\Omega_f|\ dim\ W^u_p=i\}$, $A_f=\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^1}\overline{W^u_\sigma}$, $R_f=\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}}\overline{W^s_\sigma}$, $V_f=S^n\setminus(A_f\cup R_f)$. Обозначим через $\widehat{V}_f=V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f, через $p_{_f}:V_f\to\widehat{V}_f$ — естественную проекцию и через $\eta_{_f}:\pi_1(\widehat{V}_f)\to\mathbb{Z}$ — эпиморфизм, индуцированный отображением $p_{_f}$. Положим $\hat{L}^s_f=\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^1}p_f(W^s(\sigma)\setminus\sigma)$, $\hat{L}^u_f=\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}}p_f(W^u(\sigma)\setminus\sigma)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Набор* $S_f=(\widehat{V}_f,\eta_{_f},\hat{L}^s_f,\hat{L}^u_f)$ *назовем схемой диффеоморфизма* $f\in G$.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Схемы* S_f *и* $S_{f'}$ *диффеоморфизмов* $f,f'\in G$ *будем называть эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\hat{\varphi}:\widehat{V}_f\to\widehat{V}_{f'}$ *со следующими свойствами:*

1) $\eta_{_f}=\eta_{_{f'}}\hat{\varphi}_*$;

2) $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f)=\hat{L}^s_{f'}$ *и* $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f)=\hat{L}^u_{f'}$.

Основной результат этой работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. *Необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов* $f,f'\in G$ *является эквивалентность их схем* $S_f,S_{f'}$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Разрывные действия групп преобразований

В этом разделе мы приводим сведения о свойствах группы преобразований $\mathcal{F}=\{f^n|_X,n\in\mathbb{Z}\}$ действующей разрывно на некотором гладком (вообще говоря не компактном) многообразии X и порожденной диффеоморфизмом $f:X\to X$. Такие группы преобразований естественным образом появляются при рассмотрении ограничения исходного диффеоморфизма Морса-Смейла на некоторые подмножества блуждающих точек и порождают топологические инварианты, используемые для решения проблемы топологической классификации.

Пусть $f : X \to X$ — диффеоморфизм, заданный на гладком связном многообразии X (вообще говоря не компактном), такой, что группа $\mathcal{F} = \{f^n|_X, n \in \mathbb{Z}\}$ действует на X разрывно[4].

Будем обозначать через $\widehat{X}_f = X/_{\mathcal{F}}$ пространство орбит этого действия и через $p_f : X \to \widehat{X}_f$ естественную проекцию.

В силу [9] (теорема 3.5.7) проекция $p_f : X \to \widehat{X}_f$ является накрывающим отображением[5], а пространство $\widehat{X}_f$ является гладким многообразием.

Обозначим через $\eta_f : \pi_1(\widehat{X}_f) \to \mathbb{Z}$ гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть $c \in \widehat{X}_f$ — не гомотопная нулю петля в $\widehat{X}_f$ и $[c] \in \pi_1(\widehat{X}_f)$ — класс гомотопической эквивалентности петли c. Выберем произвольную точку $\hat{x} \in c$, обозначим через $p_f^{-1}(\hat{x})$ полный прообраз точки $\hat{x}$ и зафиксируем точку $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$. Так как p_f — накрытие, то существует единственный путь $\tilde{c}(t)$ с началом в точке $\tilde{x}$ ($\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), накрывающий петлю c (то есть такой, что $p_f(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$). Поэтому существует элемент $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$. Положим $\eta_f([c]) = n$. Из [10] (гл. 18) следует, что гомоморфизм η_f является эпиморфизмом. Следующие утверждения доказаны в [4].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть X, Y — связные гладкие многообразия и $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ — диффеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{F} = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, Y соответственно. Пусть $\varphi : X \to Y$ — гомеоморфизм (диффеоморфизм), сопрягающий диффеоморфизмы f и g. Тогда отображение $\widehat{\varphi} : \widehat{X}_f \to \widehat{Y}_g$, заданное формулой $\widehat{\varphi} = p_g \varphi p_f^{-1}$, является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом). Кроме того, $\eta_f = \eta_g \varphi_*$, где $\varphi_* : \pi_1(\widehat{X}_f) \to \pi_1(\widehat{Y}_g)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением φ.*

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть X, Y — связные гладкие многообразия и $f : X \to X$, $g : Y \to Y$ — диффеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{F} = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, Y, соответственно. Пусть $\widehat{\varphi} : \widehat{X}_f \to \widehat{Y}_g$ — гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что $\eta_f = \eta_g \varphi_*$. Пусть $\hat{x} \in \widehat{X}_f$, $\tilde{x} \in p_f^{-1}(x)$, $y = \widehat{\varphi}(x)$ и $\tilde{y} \in p_g^{-1}(y)$. Тогда существует единственный гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\varphi : X \to Y$, сопрягающий диффеоморфизмы f и g и такой, что $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$.*

2.2. Канонические многообразия, используемые в работе

Будем называть *n-шаром* (*n-диском*) многообразие, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$. *Открытым n-шаром* (*сферой S^{n-1}*)

[4] Группа H *действует* на многообразии X, если задано отображение $\zeta : H \times X \to X$, обладающее следующими свойствами:

1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e — нейтральный (единичный) элемент группы H;
2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in H$.

Группа H действует *разрывно* на многообразии X, если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $h \in H$ таких, что $\zeta(h, K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

[5] Непрерывное сюрьективное отображение $p_f : X \to X/_{\mathcal{F}}$ называется накрывающим, если для любой точки $x \in X/_{\mathcal{F}}$ существует окрестность $U \in X/_{\mathcal{F}}$ такая, что $p_f^{-1}(U)$ является объединением открытых попарно непересекающихся множеств u_j, $j \in J$, таких, что для любого $j \in J$ ограничение $p_f|_{u_j} : u_j \to U$ является гомеоморфизмом.

будем называть многообразие, гомеоморфное внутренности $int\ \mathbb{B}^n$ (границе $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$) шара $\mathbb{B}^n$.

Будем называть сферу $S^{n-1} \subset M^n$ *цилиндрически вложенной в* M^n, если существует замкнутая окрестность $V \subset M^n$ сферы S^{n-1} и гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \to V$ такой, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

Пусть $b_- : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение евклидова пространства, заданное формулой $b_-(x_1, ..., x_n) = (-\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2}x_n)$, $\mathcal{B}_-$ — группа, порожденная ограничением отображения b_- на множество $\mathbb{R}^n_0 = \mathbb{R}^n \setminus (0, ..., 0)$, и действующая на этом множестве разрывно.

Фактор-пространство $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}_0/_{\mathcal{B}_-}$ будем называть *обобщенной n-мерной бутылкой Клейна.*

3. Свойства диффеоморфизмов из класса G

Пусть $\sigma \in \Omega^j_f$, $0 < j < n$. Обозначим через l^s_σ (l^u_σ) устойчивую (неустойчивую) сепаратрису точки σ, то есть компоненту связности множества $W^s_\sigma \setminus \sigma$ ($W^u_\sigma \setminus \sigma$).

Следующее предложение непосредственно вытекает из результатов [11].

Предложение 3.1. *Множество $\overline{l^u_\sigma} \setminus (l^u_\sigma \cup \sigma)$ состоит из стоковой периодической точки; множество $\overline{l^s_\sigma} \setminus (l^s_\sigma \cup \sigma)$ состоит из источниковой периодической точки.*

Следствие 3.1. *Для любой седловой точки σ замыкание её одномерной сепаратрисы является компактной дугой, а замыкание j-мерной сепаратрисы при $j > 1$ — j-сферой.*

Лемма 3.1. *Пусть $f \in G$, $n > 3$. Тогда множества Ω^j_f, $1 < j < (n-1)$ пусты.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $1 < j < (n-1)$, $\Omega^j_f \neq \emptyset$, и $\sigma \in \Omega^j_f$. В силу следствия 3.1. замыкания $\overline{W^u_\sigma}, \overline{W^s_\sigma}$ устойчивого и неустойчивого многообразий точки σ являются сферами размерности j и $n-j$ соответственно. Положим $S^j = \overline{W^u_\sigma}, S^{n-j} = \overline{W^s_\sigma}$. Из условий, определяющих класс G, следует, что сферы S^j, S^{n-j} пересекаются трансверсально в единственной точке σ. Отсюда следует, что индекс пересечения сфер S^j, S^{n-j}, рассматриваемых как клеточные алгебраические циклы дуальных клеточных разбиений сферы S^n, равен ± 1 (в зависимости от выбора ориентации дуальных клеточных разбиений сферы S^n). С другой стороны, поскольку группы $H_j(S^n, \mathbb{Z})$, $H_{n-j}(S^n, \mathbb{Z})$ тривиальны, то циклы S^j, S^{n-j} гомологичны нулю в S^n, и тогда, согласно [14] (теорема 1 параграфа 70 главы X), их индекс пересечения равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что $\Omega^j_f = \emptyset$.

Доказательство закончено.

Следующее предложение вытекает из результатов работ [12], [13], его детальное доказательство изложено в [7] (лемма 3.2).

Предложение 3.2. *Сфера $\overline{l^\delta_\sigma}$, где $\delta = s$ если $\sigma \in \Omega^1_f$ и $\delta = u$ если $\sigma \in \Omega^{n-1}_f$, является цилиндрически вложенной.*

Каждой седловой точке $\sigma \in \Omega^1_f \cup \Omega^{n-1}_f$ периода m_σ поставим в соответствие число ν_σ, которое равно $+1$, если отображение $f^{m_\sigma}|_{W^u_\sigma}$ сохраняет ориентацию, и равно -1, если отображение $f^{m_\sigma}|_{W^u_\sigma}$ меняет ориентацию. Число ν_σ будем называть *типом ориентации* точки σ.

Следующие два утверждения доказываются аналогично доказательствам свойств 2.4 и 2.5 работы [8].

Предложение 3.3. *Пусть $f \in G$. Тогда неблужающее множество Ω_f содержит самое большее одну седловую периодическую точку, имеющую отрицательный тип ориентации.*

Предложение 3.4. *Множество A_f (R_f) является связным одномерным полиэдром, не содержащим подмножеств, гомеоморфных окружности.*

Лемма 3.2. *Существует цилиндрически вложенная сфера $S^{n-1} \subset V_f$, ограничивающая открытый шар B^n, $A_f \subset B^n \subset S^n \setminus R_f$, и такая, что $f(S^{n-1}) \subset B^n$.*

Доказательство. Пусть ω — стоковая периодическая точка диффеоморфизма f периода m_ω, $\gamma^1_\omega, ..., \gamma^k_\omega$ — все одномерные сепаратрисы седловых точек $\sigma_1, ..., \sigma_{k_\omega}$, принадлежащие W^s_ω. Из леммы 4.1 работы [7] следует, что существует цилиндрически вложенная $(n-1)$-сфера $S_\omega \subset W^s_\omega$, ограничивающая открытый n-шар $B_\omega \subset W^s_\omega$, $B_\omega \supset \omega$, и такая, что: а) $f^{m_\omega}(S_\omega) \subset B_\omega$; б) для любого $i \in \{1, ..., k\}$ пересечение $\gamma^i_\omega \cap S_\omega$ состоит из единственной точки z^i_ω, в) сфера S_ω является гладкой в некоторой окрестности $V_{z^i_\omega}$ точки z^i_ω. Пусть $B^0_\omega = B_\omega, B^1_\omega, ..., B^{m_\omega-1}_\omega$ – последовательность шаров, ограниченных попарно непересекающимися сферами $S^0_{\omega,0}, S^1_{\omega,1}, ..., S^{m_\omega-1}_\omega$ соответственно, удовлетворяющими свойствам, аналогичным свойствам $a)-b)$ и такие, что $B^0_\omega \subset B^1_\omega \subset ... \subset B^{m_\omega-1}_\omega \subset f^{-m_\omega}(B_\omega)$. Выберем ровно по одной точке из каждой стоковой периодической орбиты и обозначим полученное множество через $\widetilde{\Omega}^0_f$. Для каждой точки $\omega \in \widetilde{\Omega}^0_f$ положим $\mathbf{B}_\omega = \bigcup\limits_{j=0}^{m_\omega-1} f^j(\overline{B^j_\omega})$. Непосредственно проверяется, что $f(\mathbf{B}_\omega) \subset int\, \mathbf{B}_\omega$. Положим $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{\omega \in \widetilde{\Omega}^0_f} \mathbf{B}_\omega$.

Пусть $\mathcal{O}_\sigma$ — седловая периодическая орбита периода m_σ. Из гиперболичности точек $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$ следует, что существует некоторая окрестности U_σ орбиты $\mathcal{O}_\sigma$, в которой определена так называемая локальная функция Морса-Ляпунова, то есть такая гладкая функция $\psi_\sigma : U_\sigma \to \mathbb{R}$, что: 1) $\psi_\sigma(f(x)) < \psi_\sigma(x)$ для любого $x \in f^{-1}(U_\sigma) \setminus \mathcal{O}_\sigma$, $\psi_\sigma(f(\sigma)) = \psi_\sigma(\sigma) = 0$ для любой точки $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$; 2) множество критических точек функции ψ_σ совпадает с множеством $\mathcal{O}_\sigma$, при этом все критические точки имеют индекс 1; 3) для любой точки $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$ существуют локальные координаты $(x_1, ..., x_n)$ такие, что $W^u_\sigma \cap U_\sigma \subset Ox_n$, $W^s_\sigma \cap U_\sigma \subset Ox_1...x_{n-1}$ и функция ψ_σ имеет вид $\psi_\sigma(x_1, ..., x_n) = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2$. Непосредственное построение такой функции изложено в книге [15] (лемма 2.2.1).

Выберем ровно по одной седловой периодической точке из каждой седловой орбиты индекса 1 и обозначим полученное множество через $\widetilde{\Omega}^1_f$. Выберем гладкие $(n-1)$-диски $D_+, D_- \subset \partial\mathbf{B}$, содержащие точки $z_+ = \partial\mathbf{B} \cap W^u_\sigma$, $z_- = \partial\mathbf{B} \cap W^u_\sigma$ соответственно. В силу λ-леммы (см., напр., [15], лемма 1.2.1) для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число k_σ такое, что компонента связности множества $f^{-km_\sigma}(D_+) \cap U_\sigma$ ($f^{-km_\sigma}(D_-) \cap U_\sigma$), содержащая точку $f^{-km_\sigma}(z_+)$ ($f^{-km_\sigma}(z_-)$), и множество $W^s_\sigma \cap U_\sigma$ $\varepsilon - C^1$-близки для любого $k > k_\sigma$. Отсюда следует, что существует такое значение $c_\sigma > 0$, что множество $H_{\sigma,c} = \{(x_1, ..., x_n) \in U_\sigma : x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 - x_n^2 \le c\}$ пересекается с K_+ (K_-) трансверсально по $(n-1)$-диску для всех $c < c_\sigma$.

Положим $\mathbf{k} = \max\limits_{\sigma \in \widetilde{\Omega}^1_f} k_\sigma$, $\mathbf{c} = \min\limits_{\sigma \in \widetilde{\Omega}^1_f} c_\sigma$, $\mathbf{H}_\sigma = \bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1} f^i(H_{\sigma,\mathbf{c}})$. Из определения функции

Морса-Ляпунова следует, что $f(\mathbf{H}_\sigma) \subset int\ \mathbf{H}_\sigma$. Положим $\mathbf{H} = \bigcup\limits_{\sigma \in \widetilde{\Omega}^1_f} \mathbf{H}_\sigma$. Тогда искомые объекты B^n, S^{n-1} определяются как $B^n = f^{-\mathbf{k}}(\mathbf{B}) \cup \mathbf{H}$, $S^{n-1} = \partial B^n$.
Доказательство закончено.

3.1. Линеаризующая окрестность седловой точки

Обозначим через $a_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\nu \in \{1, -1\}$, линейный автоморфизм евклидова пространства, определенный формулой $a_\nu(x_1, x_2, ..., x_n) = (\nu \frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2} x_2, \dots, 2\nu x_n)$. Начало координат O является гиперболической седловой неподвижной точкой автоморфизма a_ν, устойчивым многообразием точки O является гиперплоскость $x_n = 0$, неустойчивым многообразием точки O является ось Ox_n.

В качестве канонической модели окрестности седловой точки будем использовать множество $U^\tau = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n^2 (x_1^2 + ... + x_{n-1}^2) \le \tau^2\}$, $\tau \in (0, 1]$, оснащенное двумя инвариантными относительно a_ν слоениями T^s, T^u такими, что каждый слой $T^s(x_n)$ слоения T^s является пересечением гиперплоскости, проходящей через точку $(0, \dots, 0, x_n)$ параллельно координатной плоскости $x_n = 0$, с множеством U^τ, а каждый слой $T^u(x_1, ..., x_{n-1})$ слоения T^u является пересечением прямой, проходящей через точку $(x_1, ..., x_{n-1}, 0)$ и параллельной оси Ox_n, с окрестностью U^τ.

Доказательство следующего утверждения приведено в разделе 4.3.1 книги [15] (см. следствие 4.3.2).

Предложение 3.5. *Пусть $\theta : U^\tau \setminus Ox_n \to U^1 \setminus Ox_n$ – топологическое вложение, тождественное на U_0 и удовлетворяющее условию $\theta a_\nu|_{U^\tau} = a_\nu \theta|_{U^\tau}$, $\nu \in \{1, -1\}$. Пусть значения $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau$ выбраны так, что $U^{\tau_2} \subset \theta(U^\tau)$, $\theta(U^{\tau_1}) \subset int\ U^{\tau_2}$. Тогда существует гомеоморфизм $\Theta : U^1 \to U^1$, удовлетворяющий условию $\Theta a_\nu|_{U^1} = a_\nu \Theta|_{U^1}$, и такой, что $\Theta|_{U^{\tau_1}} = \theta|_{U^{\tau_1}}$, $\Theta|_{U^1 \setminus int\ U^{\tau_2}} = id|_{U^1 \setminus int\ U^{\tau_2}}$.*

Пусть $f \in G$, $\sigma \in \Omega_i(f)$, $i \in \{1, n-1\}$, и ν_σ – тип ориентации точки σ. Из гиперболичности точки σ вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.6. *Существует окрестность v_σ точки σ и гомеоморфизм $\chi_\sigma : v_\sigma \to U^1$ такие, что:*
1) если $i = 1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{v_\sigma} = a_{\nu_\sigma} \chi_\sigma|_{v_\sigma}$.
2) если $i = n-1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{v_\sigma} = a^{-1}_{\nu_\sigma} \chi_\sigma|_{v_\sigma}$.

Положим $v^\tau_\sigma = \chi^{-1}_\sigma(U^\tau)$, $T^s_\sigma = \chi^{-1}_\sigma(T^s)$, $T^u_\sigma = \chi^{-1}_\sigma(T^u)$.

4. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности

Напомним, что во введении определена схема $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f)$ диффеоморфизма $f \in G$, где $\widehat{V}_f = V_f / f$ – пространство орбит действия f на множество V_f, $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ – естественная проекция и $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$ – эпиморфизм, $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega^1_f} p_f(W^s(\sigma) \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega^{n-1}_f} p_f(W^u(\sigma) \setminus \sigma)$.

Следующая лемма является непосредственным следствием леммы 3.2.

Л е м м а 4.1. *Пространство $\widehat{V}_f$ является гладким многообразием, гомеоморфным прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.*

Справедливость предложения 4.1. следует из предложения 2.1.5 книги [15].

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Пусть $\sigma\in\Omega_1$, $(\sigma\in\Omega_{n-1})$ – седловая периодическая точка диффеоморфизма f периода m_σ с типом ориентации ν_σ. Если $\nu_\sigma=1$, то проекция сепаратрисы $\hat{l}^s=p_f(W^s(\sigma)\setminus\sigma)$ $(\hat{l}^u=p_f(W^u(\sigma)\setminus\sigma)$ является гладким подмногообразием многообразия $\hat{V}_f$, гомеоморфным прямому произведению $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1$. Если $\nu_\sigma=-1$ проекция сепаратрисы $l^s=p_f(W^s(\sigma)\setminus\sigma)$ $(l^u=p_f(W^u(\sigma)\setminus\sigma)$ является гладким подмногообразием многообразия $\hat{V}_f$, гомеоморфным обобщенной бутылке Клейна $\mathbb{K}^{n-1}$. В обоих случаях гомоморфизм $i_*:\pi_1(l^s)\to\mathbb{Z}$, индуцированный вложением, является нетривиальным эпиморфизмом, определяемым соотношением $i_*(\pi_1(l^s))=m_\sigma\mathbb{Z}$.*

4.1. Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость эквивалентности схем $S_f,S_{f'}$ топологически сопряженных диффеоморфизмов f,f' следует из предложения 2.1.. Докажем достаточность. Пусть схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны посредством гомеоморфизма $\hat\varphi:\widehat{V}_f\to\widehat{V}_{f'}$. Построим по шагам гомеоморфизм $h:S^n\to S^n$, сопрягающий диффеоморфизмы f,f'.

Шаг 1. В силу утверждения 2.2. существует поднятие $\varphi:V_f\to V_{f'}$ гомеоморфизма $\hat\varphi$, являющееся гомеоморфизмом, сопрягающим диффеоморфизмы $f|_{V_f}$ с $f'|_{V'_f}$ и таким, что для любой седловой точки $\sigma\in\Omega^1_f$ $(\sigma\in\Omega^{n-1}_f)$ найдется точка $\sigma'\in\Omega^1_{f'}$ $(\sigma'\in\Omega^{n-1}_{f'})$ такая, что $\varphi(W^s_\sigma\setminus\sigma)=W^s_{\sigma'}\setminus\sigma'$ $(\varphi(W^u_\sigma\setminus\sigma)=W^u_{\sigma'}\setminus\sigma'$). Таким образом, гомеоморфизм φ единственным образом продолжается на седловые точки.

Шаг 2. Выберем ровно по одной точке из каждой седловой орбиты индекса 1 и обозначим полученное множество через $\widetilde{\Omega}^1_f$. Из утверждения 3.6. и условия отсутствия гетероклинических пересечений следует существование семейства попарно непересекающихся окрестностей $\{v_\sigma\}$ $(\{v'_\sigma\})$ седловых точек из $\widetilde{\Omega}^1_f$ $(\widetilde{\Omega}^1_{f'})$ и отображений $\chi_\sigma:v_\sigma\to U^1$ ($\chi_{\sigma'}:v_{\sigma'}\to U^1$), сопрягающих ограничение диффеоморфизма f^{m_σ} ($f'^{m_{\sigma'}}$) на v_σ $(v_{\sigma'})$ с диффеоморфизмом $a_\nu|_{U^1}$. Положим $\varphi^u_\sigma=\chi^{-1}_{\sigma'}\chi_\sigma|_{W^u_\sigma}$.

Выберем значение $\tau\in(0,1]$ так, чтобы на множестве v^τ_σ было корректно определено топологическое вложение $\psi:v^\tau_\sigma\to v_{\sigma'}$, задаваемое формулами $\psi(p)=T^s_\sigma(\varphi(\pi^s_\sigma(x)))\cap T'^u_\sigma(\varphi^u_\sigma(\pi^u_\sigma(x)))$, и такое, что $\psi(v^\tau_\sigma\setminus W^u_\sigma)\subset\varphi(v^\tau_\sigma\setminus W^u_\sigma)$.

Определим топологическое вложение $\theta_\sigma:v^\tau_\sigma\to v_\sigma$ формулой $\theta=\varphi^{-1}\psi$. Из леммы 3.5. следует, что существует $0<\tau_1<\tau$ и гомеоморфизм $\Theta:v_\sigma\to v_\sigma$, совпадающий с θ на множестве $v^{\tau_1}_\sigma$ и являющийся тождественным на ∂v_σ.

Определим гомеоморфизмы $h_{\sigma,\sigma'}:v_\sigma\to v'_\sigma$, $h_{O(\sigma),O(\sigma')}:\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1}V_{f^i(\sigma)}\to\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1}V_{f'^i(\sigma')}$ формулами $h_{\sigma,\sigma'}=\varphi\Theta$, $h_{O(\sigma),O(\sigma')}=f'^ih_{\sigma,\sigma'}f^{-i}(x)$ для точки $x\in V_{f^i(\sigma)}$.

Обозначим через $H_1:\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1}v_\sigma\to\bigcup\limits_{\sigma'\in\Omega'_1}v_{\sigma'}$ гомеоморфизм, совпадающий для каждой точки $\sigma\in\Omega_1$ с гомеоморфизмом $h_{O(\sigma),O(\sigma')}$.

Шаг 3 Для сохраняющих ориентацию точек из множества Ω_{n-1} повторим построения шага 2 с формальной заменой s на u, a_ν на a^{-1}_ν. Обозначим через $H_{n-1}:\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_{n-1}}v_\sigma\to\bigcup\limits_{\sigma'\in\Omega'_{n-1}}v_{\sigma'}$ полученный гомеоморфизм.

Шаг 4 Определим гомеоморфизм $H:S^n\setminus(\Omega_0\cup\Omega_{n-1})\to S^n\setminus(\Omega'_0\cup\Omega'_{n-1})$ формулой

$$H(x) = \begin{cases} \varphi(x), \text{ если } x \in M^3 \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1 \cup \Omega_{n-1}} v_\sigma; \\ H_\delta(x), \text{ если } x \in v_\sigma, \text{ где } \sigma \in \Omega_\delta,\ \delta \in \{1, n-1\}, \end{cases}$$

и продолжим гомеоморфизм H на множества Ω_0, Ω_{n-1} так, чтобы полученный гомеоморфизм $\mathbf{H} : S^n \to S^n$ удовлетворял условию $f' = \mathbf{H}^{-1} f \mathbf{H}$.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Bonatti Ch., Grines V., “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London)*, **6**:4 (2000), 579 – 602.

2. Bonatti Ch., Grines V., Pécou E., “Bidimensional links and diffeomorphisms om 3-manifolds”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 2002, № 22, 687—710.

3. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E., “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, 2004, № 43, 369 – 391.

4. Бонатти Хр., Гринес В.З, Починка О.В., “Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Труды Института Математики Стеклова*, **250** (2005), 5 – 53.

5. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *Foliations*, 2005, 121–147.

6. Починка О.В., “Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях”, *ДАН*, **440**:6 (2011), 34 -– 37.

7. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61–86.

8. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62–86.

9. Терстон У., *Трехмерная геометрия и топология*, МЦНМО, Москва, 2001, 310 с.

10. Косневски Ч., *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, Москва, 1983, 302 с.

11. Smale S., “Morse inequalities for a dynamical systems”, *Bull. Am. math. Soc.*, **66** (1960), 43 – 49.

12. Cantrell J.C., “Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n”, *Proceeding of the American Mathematical society*, **15**:4 (1964), 574 – 578.

13. Brown M., “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math*, **75**:2 (1962), 331 – 341.

14. Зейферт Г., *Топология*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001, 448 с.

15. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

Complete topological invariant of Morse-Smale Diffeomorphism without heteroclinical intersections on Sphere S^n of dimensional greater than three.

© **V.Z. Grines**[6], **E.Ya. Gurevich**[7], **O.V. Pochinka.**[8]

Abstract. The paper is devoted to solution of the problem on topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinical intersection on sphere S^n of dimension $n > 3$. As a basic instrument there is used a scheme of diffeomorphism, which is an invariant describing the structure of orbit space of diffeomorphism.

Key Words: dynamical system, cascades, Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification.

[6] Heard of High Mathematics Chair, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru

[7] Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dymanics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod; elena _ gurevich@list.ru.

[8] Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru