Краткие сообщения

УДК 517.929

Метод понижения порядка и операция сдвига

© М.Б. Авдеева[1], А.В. Зубов[2]

Аннотация. В этой статье изложен эффективный метод понижения порядка, являющийся некоторым аналогом алгоритма Рауса и позволяющий определить число корней исходного многогчлена, лежащих как в левой, так и в правой полуплоскости, не более чем за $5/4\,n(n+1)$ элементарных арифметических операций.

Ключевые слова: полуплоскость, коэффициент, устойчивость, вещественные корни, абсолютная устойчивость и неустойчивость.

1. Введение

В этой статье изложен эффективный метод понижения порядка, являющийся некоторым аналогом алгоритма Рауса и позволяющий определить число корней исходного многочлена, лежащих как в левой $Rez < 0$, так и правой $Rez > 0$ полуплоскости, не более чем за $\frac{5}{4}n(n+1)$ элементарных арифметических операций [4].

Известно, что алгоритм Рауса служит для определения устойчивости многочленов, т. е. для определения принадлежности всех корней этого многочлена левой полуплоскости $Rez < 0$. Этот алгоритм на каждом шагу последовательно понижает порядок многочлена $f_n(z)$ степени n с положительными действительными коэффициентами

$$f_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n \tag{1.1}$$

посредством операции понижения порядка

$$f_{n-1}(z) = f_n(z) - \alpha_n z S_n(z), \quad \alpha_n = a_n \setminus a_{n-1} > 0, \tag{1.2}$$

где $S_{n-1}(z) = a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-3}z^{n-3} + a_{n-5}z^{n-5} + \ldots$.

Раус показал, что, если многочлен $f_n(z)$ является устойчивым, то многочлен $f_{n-1}(z)$ также является устойчивым и, обратно. Таким образом, если исходный многочлен $f_n(z)$ является устойчивым, то, последовательно применяя операцию понижения порядка (1.2), придем к многочлену первого порядка, имеющему отрицательный вещественный корень, при этом все $\alpha_i > 0$, $(i = n, \ldots, 2)$ [1].

2. Построение алгоритма последовательного понижения порядка исходного многочлена

Поставим задачу: построить алгоритм последовательного понижения порядка исходного многочлена с действительными коэффициентами с целью определения числа корней этого многочлена, лежащих как в левой $Rez < 0$, так и в правой $Rez > 0$ полуплоскости [5].

[1] Аспирант, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru
[2] Доцент, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

О п р е д е л е н и е 2.1. *Многочлен $f(z)$ степени $n (n \geq 1)$*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \tag{2.1}$$

называется абсолютно устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости $Re z < 0$. Если, кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, этот многочлен имеет и чисто мнимые корни единичной кратности, то он называется устойчивым. Во всех остальных случаях многочлен называется неустойчивым. Очевидно, что для характеристического многочлена эти три случая соответствуют асимптотической устойчивости, устойчивости (по Ляпунову) и неустойчивости, порождающей его линейной стационарной системы.

Заметим, что в литературе первый тип полиномов называется устойчивым, а осталные неустойчивыми [2], [3] - это является более грубой классификацией полиномов по локализации корней, чем предлагается выше.

О п р е д е л е н и е 2.2. *Пусть задан многочлен $f(z)$ степени n, не имеющий нулевых корней. Многочлен $F(z) = S_\alpha f(z)$ степени $n+1$, не имеющий нулевых корней, где*

$$F(z) = (1 + \alpha z) f(z) + f(-z), \quad \alpha \neq 0 \tag{2.2}$$

будем называть присоединенным к многочлену $f(z)$, операцию S_α будем называть операцией присоединения, а многочлен $f(z)$ называется порождающим многочленом для многочлена $F(z)$.

Установим для операции присоединения два основных свойства.

Т е о р е м а 2.1. *1) Многочлен $F(z)$, присоединенный к многочлену $f(z)$ с действительными коэффициентами, имеет одни и те же кососимметричные корни (с учетом их кратностей), что и многочлен $f(z)$. 2) Если вещественное число $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$, то число корней многочлена $F(z)$, лежащих в левой полуплоскости $Re\, z < 0$ (правой полуплоскости $Re\, z > 0$), увеличивается на единицу по сравнению с числом таких же корней у многочлена $f(z)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы элементарно выводится из равенства

$$\begin{aligned} F(z) = (1 + \alpha z) r(z) f_0(z) + r(-z) f_0(-z) = \\ = r(z)((1 + \alpha z) f_0(z) + f_0(-z)) = r(z) F_0(z), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где корнями многочлена $r(z)$ являються только кососимметричные корни многочлена $f(z)$ $(r(z) = r(-z))$ с учетом их кратностей, а корни многочлена $f_0(z)$ совпадают с остальными корнями многочлена $f(z)$, также с учетом их кратностей.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Введем в рассмотрение многочлен

$$\Phi_\mu(z) = (1 + \alpha z) f_0(z) + \mu f_0(-z), \quad \mu \in [0, 1], \quad \alpha \neq 0.$$

Заметим, что коэффициенты этого многочлена являются вещественными и непрерывными функциями вещественного параметра $\mu \in [0, 1]$. Отсюда вытекает, что корни этого многочлена $z_j(\mu)$ также являются непрерывными функциями параметра μ при $\mu \in [0, 1]$.

Очевидно, что из равенств (2.3) и вида многочлена $\Phi_\mu(z)$ следует, что

$$\Phi_1(z) = F_0(z), \quad F(z) = r(z)\Phi_1(z).$$

С другой стороны, $\Phi_0(z) = (1+\alpha z)f_0(z)$. Это означает, что корни $z_j(\mu)$ многочлена $\Phi_\mu(z)$ при $\mu = 0$ совпадают с корнями z_j многочлена $f_0(z)$, т.е. с корнями $z_j(0) = z_j$ с добавлением корня $z = -1/\alpha$.

Покажем, что непрерывные кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0,1]$ не пересекают мнимую ось, т.е. $z_j(\mu) \neq i\beta$ при $\mu \in [0,1]$. Допустим, что это не так. Пусть существует такое $\beta \neq 0$, что справедливо равенство

$$\Phi_\mu(i\beta) = (1+i\alpha\beta)f_0(i\beta) + \mu f_0(-i\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0,1].$$

Так как по условию многочлен $f_0(z)$ является многочленом с действительными коэффициентами и не имеет кососимметричных корней, а тем самым и чисто мнимых, то $f_0(i\beta) \neq 0$ для любого вещественного $\beta \neq 0$. Тогда из свойств комплексных чисел следует, что $|f_0(\bar{z})| = |f_0(\bar{z}|$ и из предыдущего равенства вытекает соотношение

$$|1+i\alpha\beta|\,|f_0(i\beta)| = |\mu|\,|f_0(-i\beta)| = |\mu|\,|f_0(i\beta)|.$$

Это равенство, разделив на $|f(i\beta)| \neq 0$ обе его части, можно переписать в виде $1+\alpha^2\beta^2 = \mu^2$. Так как величины $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то величина $|\mu| > 1$, что противоречит условию $\mu \in [0,1]$. Отсюда следует, что у многочлена $\Phi_\mu(z)$ нет чисто мнимых корней при $\mu \in [0,1]$. Это и означает, что непрерывные кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0,1]$ не пересекают мнимую ось, и, следовательно, остаются при $\mu \in [0,1]$ в той же полуплоскости комплексного переменного, что и величины $z_j(0) = z_j$, $z = -1/\alpha$.

Так как корни многочлена $\Phi_0(z)$ совпадают с корнями z_j многочлена $f_0(z)$ с добавлением корня $z = -1/\alpha$, то при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ число корней многочлена $\Phi_0(z)$, лежащих в левой полуплоскости $Rez < 0$ (правой полуплоскости), на единицу больше числа таких же корней у многочлена $f_0(z)$. С учетом того, что кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0,1]$ остаются в одной и той же полуплоскости, можно сделать вывод о том, что многочлен $\Phi_\mu(z)$, и, следовательно, и многочлен $\Phi_1(z)$, имеет такое же число корней в левой и правой полуплоскости, что и многочлен $\Phi_0(z)$. Из представления $F(z) = r(z)\Phi_0(z)$ вытекает справедливость второго утверждения теоремы. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. *Для произвольного многочлена $F(z)$ степени $n+1$, не имеющего нулевых корней*

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n+1}z^{n+1}, \quad A_1 \neq 0, \tag{2.4}$$

существует единственный порождающий его многочлен $f(z)$ степени n, коэффициенты которого можно однозначно определить методом понижения порядка (МПП) за $2n+1$ арифметическую операцию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что многочлен $f(z)$, порождающий многочлен $F(z)$, существует, тогда он удовлетворяет уравнению (2.2) по определению операции присоединения. Из уравнения (2.2) легко получить уравнение для искомого многочлена $f(z)$

$$\begin{gathered} \alpha^2 z^2(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z) = \\ = (\alpha A_0 - 2A_1)z + \alpha A_1 z^2 + \ldots + \alpha A_{n+1}z^{n+2} \end{gathered} \tag{2.5}$$

Полагая в уравнении (2.5) $\alpha = 2A_1/A_0$, получим, что в нем справа стоит многочлен степени $n+2$, в котором можно вынести за скобки общий множитель z^2. Разделив обе части уравнения (2.5) на $\alpha^2 z^2$, получим, что многочлен $f(z)$ не имеет нулевых корней и является однозначно определенным многочленом степени n, порождающим многочлен $F(z)$. Это вытекает из того, что правая часть уравнения (2.5) однозначно определена для любого α. Если выбрать $\alpha \neq 2A_1/A_0$, то уравнение (2.5) уже не будет определять многочлена $f(z)$ степени n. Нетрудно видеть, что коэффициенты многочлена $f(z)$ однозначно находятсмя по рекурретным формулам:

$$\begin{gathered} a_{2l} = \tfrac{A_{2l+1}}{\alpha},\ a_{2l-1} = \tfrac{A_{2l}}{\alpha} - \tfrac{2A_{2l+1}}{\alpha^2},\ \alpha = \tfrac{2A_1}{A_0}, \\ a_0 = \tfrac{A_0}{2},\ A_{n+2} = 0,\ l = 0, 1, \ldots, [n/2], \end{gathered} \tag{2.6}$$

где $[n/2]$ - целая часть числа $n/2$. Этот алгоритм в дальнейшем будем называть методом понижения порядка (МПП). Отсюда следует, что коэффициенты многочлена $f(z)$ вычисляются из коэффициентов многочлена $F(z)$ за $2n+1$ арифметическую операцию. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.3. *Для любого стандартного полинома Гурвица степени $n > 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица первого порядка $a + bz$, $a > 0$, $b > 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что для любого стандартного полинома Гурвица $F(z)$ степени $n+1$, $n \geq 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица степени n.

Согласно лемме 3 для любого стандатного полинома Гурвица $F(z) = A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n+1} z^{n+1}$ степени $n+1$ существует порождающий его стандартный полином Гурвица степени n $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, т.е. $F(z) = S_\alpha f(z)$. Тогда из формулы (2.7)

$$F(z) = (1 + \alpha z) f(z) + f(-z), \quad \alpha > 0 \tag{2.7}$$

вытекает, что коэффициенты этих полиномов связаны соотношениями

$$A_0 = 2a_0,\ A_1 = \alpha a_0,\ A_{n+1} = \alpha a_n,\ A_{2l} = 2a_{2l} + \alpha a_{2l-1},$$

$$A_{2l+1} = \alpha a_{2l} + \alpha a_{2l-1},\ (l = 1, \ldots, [\frac{n}{2}]), \tag{2.8}$$

где [] - целая часть числа. Предположим, что есть два различных стандартных полинома Гурвица степени n, порождающих полином, $F(z)$, т.е. $F(z) = S_\alpha f(z) = A_{\bar\alpha} \bar f(z)$. Тогда из формул (2.8) следуют очевидные равенства

$$\frac{2A_1}{A_0} = \frac{2\alpha a_0}{2a_0} = \frac{2\bar\alpha \bar a_0}{2\bar a_0} = \alpha = \bar\alpha.$$

Отсюда и из формул (2.8) вытекает, что порождающий полином является единственным, т.к. между числом $\alpha > 0$, коэффициентами порождающего полинома $f(z)$ и коэффициентами присоединенного полинома $F(z)$ есть взаимно однозначное соответствие

$$\bar a_{2i} = \frac{A_{2l+1}}{\alpha}, \quad \bar a_{2i-1} = a_{2l-1} = \frac{A_{2l}}{\alpha} - \frac{2A_{2l+1}}{\alpha^2},$$

$$\alpha = \bar\alpha = \frac{2A_1}{A_0}, \quad a_0 = \bar a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad l = 1, \ldots, [\frac{n}{2}]. \tag{2.9}$$

Итак, мы показали, что для любого стандартного полинома Гурвица $F(z)$ степени $n+1$, $n > 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица

$f(z)$ степени n, коэффициенты которого находятся по формуле (2.9). Продолжая процесс понижения порядка, т.е. переходя по формулам (2.9) к стандартному полиному Гурвица на единицу меньшей степени за n шагов, мы получим стандартный полином Гурвица первого порядка $a + bz$, $a > 0$, $b > 0$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Л. Д. Блистанова, И. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Учебное пособие, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

2. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002, 303 с.

3. М. М. Постников, *Устойчивые многочлены*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы., М, 1981, 176 с.

4. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем.*, Уч. пос., «ВВМ», СПб, 2009, 343 с.

5. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, *Теория устойчивости и применение к задачам читсленного анализа.*, Уч. пос., НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2010, 102 с.

The method of low to order and the operation of displacement

© **M.B. Avdeeva**[3], **A.V. Zubov**[4]

Abstract. In this article is expounds effective method of low to order, is appears same analog of algorithm Rauses and is allows to define the number of roots the previous polynom, is lies so in left, that in right semi-plane, no more that for $\frac{5}{4}n(n+1)$ elementary arithmetical operations.

Key Words: semi-plane, coefficient, stability, material roots, absolutes stability and nostability.

[3] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru
[4] Lecturer, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru