УДК 517.929

Задача поиска минимального многочлена

© И.В. Зубов[1], В.И. Зубов[2]

Аннотация. В данной статье на основе метода понижения порядка излагается алгоритм вычисления числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена.

Ключевые слова: алгоритм, корень, перемена знака, многочлен, левая и правая полуплоскости.

1. Введение

В статье предлагается новый метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод позволяет находить коэффициенты минимального многочлена в пределах точности представления чисел в компьютере и свободен от ошибок округления. Зная коэффициенты минимального многочлена легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка.

2. Постановка задачи

Пусть A - вещественная, постоянная матрица размера $n \times n$. Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени анулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени равным единице. Таким образом минимальный многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0, \tag{2.1}$$

причем выполняется матричное тождество:

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E = 0 \tag{2.2}$$

Заметим, что вещественные матрицы размера $n \times n$ образуют вещественное линейное пространство размерности n^2, где можно использовать все результаты и определения, полученные в линейной алгебре такие как: линейная зависимость и независимость элементов; базис и разложение по нему и тому подобное [1].

Исходя из этого, можно сформулировать очевидное утверждение.

3. Теорема о степени минимального многочлена

Т е о р е м а 3.1. *Степень минимального многочлена равна $k+1$, если матрицы*

$$A^k, A^{k-1}, \ldots, A, A^0, A^0 = E \tag{3.1}$$

- линейно независимы, а матрицы

$$A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \ldots, A, E \tag{3.2}$$

[1] Профессор, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru
[2] Аспирант, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru

уже линейно зависимы.

Доказательство. Действительно, если матрицы (3.2) линейно зависимы, то существует вещественные числа $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$ не все равные нулю такие, что выполняется матричное тождество:

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i = 0, \quad A^0 = E. \tag{3.3}$$

Из этого тождества следует, что $c_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае это будет означать, что матрицы (3.1) - линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство:

$$A^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} A^k + \ldots + \frac{c_1}{c_{k+1}} A + \frac{c_0}{c_{k+1}} E = 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества, являются коэффициентами минимального многочлена [2].

Доказательство закончено.

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (3.1). Эта матрица $n^2 \times (k+1)$ столбцы которой составлены из столбцов A_{im}, $i = \overline{1,n}$ матриц A^m, $m = \overline{k,0}$, записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца этой матрицы, кончая последним [5]:

$$B_k = \begin{pmatrix} A_{1k} & A_{1k-1} & \ldots & E_1 \\ A_{2k} & A_{2k-1} & \ldots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ A_{nk} & A_{nk-1} & \ldots & E_n \end{pmatrix} = (A_k, \ldots, A_0), \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}, \quad m = \overline{k,0} \tag{3.5}$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (3.1) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы B_k, т.к. справедливо соотношение [3]

$$B_k C = 0 \leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} c_i A^i = 0, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T. \tag{3.6}$$

Это означает, что линейная независимость матриц (3.1) эквивалентна тому, что матрица B_k размера $n^2 \times (k+1)$, является матрицей полного ранга, т.е. ее ранг равен $k+1$ [4].

Отсюда вытекает, что теорему 3.1. можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. *Если для первого из чисел $k = \overline{0,n}$ система линейных алгебраических уравнений*

$$B_k C = A_{k+1}, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T \tag{3.7}$$

имеет решение, то минимальный многочлен матрицы A имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \ldots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \tag{3.8}$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (3.8) $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$, являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (3.7).

Доказательство. *Разрешимость уравнения* (3.7) *означает разрешимость матричного тождества*

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E. \tag{3.9}$$

Так как k *является минимальным из чисел* $\overline{0,n}$, *то многочлен* (3.8), *является минимальным многочленом.*

С другой стороны, если многочлен (3.8), *является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество* (3.9), *которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений* (3.7). *Теорема доказана.*

Замечание 3.1. *Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения* $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ *системы линейных алгебраических уравнений* (3.7) *для наименьшего целого числа* k, $k = \overline{1,n}$. *При этом величины* $-c_k, -c_{k-1}, \ldots, -c_0$ *будут коэффициентами минимального многочлена* (3.8). *Заметим, что в силу теоремы Кели-Гамильтона матричное уравнение* (3.9) *всегда имеет решение.*

Замечание 3.2. *Если решение уравнения* (3.7) *при наименьшем из чисел* $k = \overline{0,n}$, *удовлетворяет условию* $c_0 = 0$, *то матрица* A *- невырожденная. Более того, если в этом решении* p *первых компонент нулевые* $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} = 0$, *то кратность нулевого собственного числа матрицы* A *не меньше чем* p.

Замечание 3.3. *Если матрицы* (3.1) *линейно независимы, а матрицы* (3.2) *линейно зависимы, то матрица* $B_k^T B_k$ *является положительно определенной, а матрица* $B_{k+1}^T B_{k+1}$ *неотрицательной и имеет одно собственное число равное нулю. Как известно [1], для прямоугольной матрицы* A *размера* $n \times m$ *ранг* r *сингулярной матрицы* $A^T A$ *совпадает с рангом матрицы* A, *а её сингулярные числа* ρ_i *неотрицательные. Причем, если, например,* $m \leq n$, *то число нулевых* ρ_i *равно* $m - r$. *Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы* (3.7) *при* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *а достаточно проверить при каком числе* k *атрица* $B_{k+1}^T B_{k+1}$ *становится неотрицательной (при меньших величинах* k *эта матрица является положительно определенной). Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы линейных алгебраических уравнений* (3.7) *именно для этого числа* k.

Список литературы

1. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, *Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа*, Уч. пособие, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2010, 102 с.

2. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Монография, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.

3. М. В. Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, ред. Под ред. О.А. Малафеева, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.

4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, С. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, Уч. пособие, ВВМ, СПб, 2011, 362 с.

5. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.

The common method of investigation of stability

© **I.V. Zubov**[3], **V.I. Zubov**[4]

Abstract. In giving article on base method of low to order is expounds algorithm to calculating of number clear mystic roots by characteristic polynom.
Key Words: algorithm, root, change of sign, polynom, left and right semi-plane.

[3] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg, a_v_zubov@mail.ru
[4] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg, a_v_zubov@mail.ru