УДК 519.624.8

# Непрерывные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств

© И.П. Рязанцева[1]

**Аннотация.** Для смешанных вариационных неравенств в гильбертовом пространстве с монотонным оператором и собственным выпуклым полунепрерывным снизу функционалом при приближенном задании данных построены непрерывные методы регуляризации первого порядка по оператору и по функционалу, получены достаточные условия их сходимости к нормальному решению исходной задачи.

**Ключевые слова:** смешанное вариационное неравенство, непрерывный метод, монотонный оператор, выпуклый функционал.

## 1. Основные предположения. Постановка задачи.

Пусть $H$ – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \to R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, элемент $f \in H$, $(x, y)$ – скалярное произведение элементов $x$ и $y$ из $H$. Неравенство вида

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \leq 0, \quad x \in H \quad \forall y \in H \tag{1.1}$$

называют смешанным вариационным неравенством.

Если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x)}{\|x\|} = +\infty, \quad x_0 \in H, \quad \varphi(x_0) < \infty, \tag{1.2}$$

то (1.1) разрешимо (см. [1], с.265). Доказательство этого утверждения основано на переходе от (1.1) к вариационному неравенству

$$(\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{f}, \tilde{x} - \tilde{y})_{\tilde{H}} \leq 0, \quad \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{\Omega}, \tag{1.3}$$

здесь $\tilde{A} : \tilde{H} \to \tilde{H}$, $\tilde{A} = \{A, 0\}$, $\tilde{H} = H \times R^1$, $\tilde{f} = \{f, -1\}$, $\tilde{\Omega} \subset \tilde{H}$, $\tilde{\Omega} = eg\varphi = \{\{u, \lambda\} \mid \varphi(u) \leq \lambda,\ u \in H,\ \lambda \in R^1\}$ – надграфик $\varphi$ на $H$, $\tilde{x} = \{x, r\} \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{y} = \{y, \xi\} \in \tilde{\Omega}$, т.е. $\varphi(x) \leq r$, $\varphi(y) \leq \xi$, при этом

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{H}} = (\|x\|_H^2 + r^2)^{1/2}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{H}} = (x, y)_H + r\xi.$$

Отметим, что $\tilde{\Omega}$ есть выпуклое замкнутое множество в $\tilde{H}$ (см. [2], с.19, с.22).

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений $N$. Выпуклость и замкнутость $N$ отмечена в [3] (см. также [4], с.254). Далее $x^*$ – нормальное решение (1.1). Нас будут интересовать методы решения задачи (1.1). В предположении монотонности $A$ и выпуклости $\varphi$ установить корректность задачи (1.1) не удается, поэтому будем строить для нее методы регуляризации.

[1] профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

## 2. Операторный метод регуляризации

Рассмотрим для (1.3) известный операторный метод регуляризации

$$(\tilde{A}\tilde{x}_\alpha + \alpha\tilde{E}\tilde{x}_\alpha - \tilde{f}, \tilde{x}_\alpha - \tilde{y})_{\tilde{H}} \le 0, \quad \tilde{x}_\alpha \in \tilde{\Omega} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{\Omega}, \tag{2.1}$$

здесь $\tilde{E} = \{E, 0\}$, $E : H \to H$ – единичный оператор в $H$, $\tilde{x}_\alpha = \{x_\alpha, r_\alpha\}$, $\tilde{y} = \{y, \xi\}$, $\alpha > 0$. Расписав в (2.1) скалярное произведение в $\tilde{H}$, имеем

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + r - \xi \le 0.$$

Используя рассуждения из [1], с.266, установим эквивалентность последнего неравенства следующему смешанному вариационному неравенству

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + \varphi(x_\alpha) - \varphi(y) \le 0, \quad x_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \tag{2.2}$$

Предположим, что функционал $\varphi$ обладает свойством

$$\varphi(x) \ge -c\|x\|^\kappa, \quad c > 0, \quad \kappa \in [0, 2), \quad \|x\| \ge R_0 > 0. \tag{2.3}$$

Тогда для $x$ из $H$ с учетом монотонности $A$ имеем

$$(Ax + \alpha x - f, x - x_0) + \varphi(x) \ge \|x\|[\alpha\|x\| - \alpha\|x_0\| - \|Ax_0\| - \|f\|] -$$

$$-\|Ax_0\|\,\|x_0\| - \|f\|\,\|x_0\| - c\|x\|^\kappa, \quad x_0 \in H, \quad \varphi(x_0) < \infty, \quad \|x\| \ge R_0.$$

Отсюда делаем вывод о том, что для смешанного вариационного неравенства (2.2) выполнено условие типа (1.2). Следовательно, решение (2.2) существует. Однозначная разрешимость (2.2) доказана в [3] и [4].

Нетрудно проверить, что оператор $\tilde{A}^\alpha = \tilde{A} + \alpha\tilde{E}$ удовлетворяет неравенству

$$(\tilde{A}^\alpha\tilde{x} - \tilde{A}^\alpha\tilde{y}, \tilde{x} - \tilde{y})_{\tilde{H}} \ge \alpha\|x - y\|_H^2 \tag{2.4}$$

при любых $\tilde{x} = \{x, r\}$ и $\tilde{y} = \{y, \xi\}$ из $\tilde{H}$. Таким образом, имеем более слабое свойство, чем требуется для сильной сходимости метода (2.1) в $\tilde{H}$ к решению (1.3) (см., например, [4], глава 2). Однако, полагая в (2.1) $\tilde{y} = \tilde{x}$, а в (3) – $\tilde{y} = \tilde{x}_\alpha$, где $\tilde{x} = \{x, r\}$ и $\tilde{x}_\alpha = \{x_\alpha, r_\alpha\}$ – решения (1.3) и (2.1) соответственно, и складывая полученные результаты, имеем $\alpha(\tilde{E}\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha - \tilde{x})_{\tilde{H}} \le 0$. Отсюда известным способом (см., например, [4]) выводим сильную сходимость в $H$ элементов $x_\alpha$ к $x^*$ при $\alpha \to 0$. Кроме того, полагая в (2.2) $y = x^*$ и переходя затем к пределу при $\alpha \to 0$, приходим к неравенству $\overline{\lim}_{\alpha\to 0}\varphi(x_\alpha) \le \varphi(x^*)$, что с учетом полунепрерывности снизу функционала $\varphi$ дает сходимость $\varphi(x_\alpha)$ к $\varphi(x^*)$ при $\alpha \to 0$. Следовательно, $x_\alpha$ сходится к $x^*$ при $\alpha \to 0$ и по функционалу $\varphi$. В [3] сходимость $x_\alpha$ к $x^*$ доказана без перехода от смешанных вариационных неравенств (1.1) и (2.2) к вариационным неравенствам (1.3) и (2.1) соответственно.

Применим к смешанному вариационному неравенству (1.1) метод сглаживающего функционала А.Н.Тихонова [5],[6], т.е. заменим в (1.1) функционал $\varphi(z)$ на функционал $\varphi(z) + \alpha\|z\|^2 (\alpha > 0)$ и придем к неравенству следующего вида

$$(Az_\alpha - f, z_\alpha - y) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|z\|^2 \le 0, \quad z_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \tag{2.5}$$

С учетом монотонности $A$ и (2.3) при $\|x\| \ge R_0$ имеем

$$(Ax - f, x - x_0)) + \varphi(x) + \alpha\|x\|^2 \ge \alpha\|x\|^2 - c\|x\|^\kappa - (\|Ax_0\| + \|f\|)(\|x\| + \|x_0\|).$$

Таким образом, в наших условиях разрешимость (2.5) обеспечена. Докажем единственность решения (2.5). Пусть наряду с $z_\alpha$ элемент $y_\alpha$ также является решением (2.5), т.е. верно неравенство

$$(Ay_\alpha - f, y_\alpha - y) + \varphi(y_\alpha) + \alpha\|y_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|y\|^2 \leq 0, \quad y_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \tag{2.6}$$

Положив в (2.5) $y = tz_\alpha + (1-t)y_\alpha$, $t \in (0,1)$ и воспользовавшись монотонностью оператора $A$, выпуклостью $\varphi(x)$ и сильной выпуклостью функционала $\|x\|^2$ на $H$ (см. [7], с.182), получим

$$(Ay_\alpha - f, z_\alpha - y_\alpha) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y_\alpha) - \alpha\|y_\alpha\|^2 + t\|z_\alpha - y_\alpha\|^2 \leq 0.$$

Приняв во внимание (2.6) при $y = z_\alpha$, из последнего неравенства имеем $\|z_\alpha - y_\alpha\| \leq 0$. Единственность решения (2.5) доказана.

Полагая в (2.5) $y = x \in N$, а в (1.1) – $y = z_\alpha$ и складывая результаты, получаем неравенство $\|z_\alpha\| \leq \|x\|$ при всех $x \in N$, которое, как известно, позволяет установить сходимость $z_\alpha$ к $x^*$ при $\alpha \to 0$ (см. [4]).

Отметим, что (2.5) эквивалентно неравенству (1.3) с заменой множества $\tilde{\Omega}$ на множество $\tilde{\Omega}^\alpha$, совпадающее с надграфиком функционала $\varphi(z) + \alpha\|z\|^2$.

Сформулируем полученные результаты.

**Теорема 2.1.** *Пусть $H$ – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \to R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, удовлетворяющий условию (2.3), смешанное вариационное неравенство (1.1) имеет непустое множество решений. Тогда регуляризованные задачи (2.2) и (2.5) имеют единственные решения $x_\alpha$ и $z_\alpha$ соответственно, и $x_\alpha \to x^*$, $z_\alpha \to x^*$ при $\alpha \to 0$, где $x^*$ – нормальное решение (1.1).*

Метод (2.2) для смешанного вариационного неравенства (1.1) будем называть методом регуляризации по оператору, а (2.5) – методом регуляризации по функционалу.

Далее считаем, что условия теоремы 1 выполнены.

## 3. Непрерывные методы регуляризации

Применим к (1.3) непрерывный метод регуляризации первого порядка из [8]

$$\tilde{z}'(t) + \tilde{z}(t) = Pr_{\tilde{\Omega}}(\tilde{z}(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}]), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0 = \{z_0, r_0\}, \tag{3.1}$$

где $\tilde{z}(t) = \{z(t), r(t)\} \in \tilde{H}$, $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ – положительные непрерывные функции, $t \geq t_0$. Если оператор $A$ удовлетворяет условию Липшица, то задача Коши (3.1) имеет единственное решение класса $C^1[t_0, +\infty)$ (см. [9], $n^0$ 33.4). Перейдем от (3.1) к эквивалентному эволюционному вариационному неравенству (см. [7], с.189)

$$(\tilde{z}'(t) + \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}], \tilde{z}(t) - \tilde{y})_{\tilde{H}} \leq 0 \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{H}, \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0. \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что для $\tilde{u}(t) \notin \tilde{\Omega}$ элемент $Pr_{\tilde{\Omega}}\tilde{u}(t) = \tilde{w} = \{w, \ \varphi(w)\}$, $w \in H$. Следовательно, если элемент $\tilde{z}(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}] \notin \tilde{\Omega}$, то $\tilde{z}'(t) + \tilde{z}(t) = \{z'(t) + z(t), \ \varphi(z'(t) + z(t))\}$. Значит, расписав в (3.2) скалярное произведение из $\tilde{H}$, придем к эволюционному вариационному неравенству, в котором производная $z'(t)$ входит и под знак функционала $\varphi$. При этом исключить функцию $r(t)$ в полученном неравенстве не удается (сравни с переходом от (1.3) и (2.1) к (1.1) и (2.2) соответственно).

Если для решения (1.3) вместо (3.1) использовать непрерывный метод из [10]

$$\tilde{z}(t) = Pr_{\tilde{\Omega}}(\tilde{z}(t) - \tilde{z}'(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}]), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0,$$

то при $\tilde{z}(t) - \tilde{z}'(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}] \notin \tilde{\Omega}$ имеем $\tilde{z}(t) = \{z(t),\ \varphi(z(t))\}$. Значит, для существования $\tilde{z}'(t)$ требуется дифференцируемость функционала $\varphi$, в то время как в простом приложении смешанных вариационных неравенств из [1], с.265 функционал $\varphi$ этим свойством не обладает. Кроме того, при доказательстве сходимости рассмотренных выше непрерывных методов регуляризации возникают проблемы из-за отсутствия у оператора $\tilde{A}^\alpha$ свойства сильной монотонности на $\tilde{H}$ (см. (2.4)), которые легко преодолеваются при доказательстве сходимости операторного метода регуляризации. Подобные выводы можно сделать и для соответствующих непрерывных методов, использующих регуляризацию (1.1) по функционалу.

Таким образом, непосредственное применение известных непрерывных методов регуляризации для решения вариационного неравенства (1.3) не является эффективным. Поэтому далее при построении непрерывных методов для (1.1) используем иной подход.

Пусть в условиях теоремы 1 данные задачи (1.1) возмущены, а именно, вместо $A$, $f$ и $\varphi$ при всех $t \geq t_0 \geq 0$ известны семейства $\{A(t)\}$, $\{f(t)\}$ и $\{\varphi(t)\}$ такие, что
a) $A(t) : H \to H$ – монотонные хеминепрерывные операторы,

$$\|A(t)x - Ax\| \leq h(t)g(\|x\|) \quad \forall x \in H;$$

b) $f(t) \in H$, $\|f(t) - f\| \leq \delta(t)$;
c) $\varphi(t) : H \to R^1$ – собственные выпуклые полунепрерывные снизу функционалы,

$$|\varphi(t)(x) - \varphi(x)| \leq \sigma(t)q(\|x\|) \quad \forall x \in H,$$

здесь $g(s)$ и $q(s)$ – функции, переводящие ограниченное множество в ограниченное, $s \geq 0$, $h(t)$, $\delta(t)$ и $\sigma(t)$ – бесконечно малые при $t \to +\infty$.

Заметим, что из предположения a) следует ограниченность семейства операторов $\{A(t)\}$ при $t \geq t_0$.

Построим непрерывный метод регуляризации по оператору первого порядка следующего вида

$$\begin{aligned}(u'(t), u(t) - y) \quad &+ \quad \gamma(t)[(A(t)u(t)) + \alpha(t)u(t) - f(t), u(t) - y) + \\ &+ \quad \varphi(t)(u(t)) - \varphi(t)(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad u(t) \in H,\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \tag{3.4}$$

где $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные дифференцируемые функции, $t \geq t_0 \geq 0$, причем $\alpha(t)$ – выпуклая убывающая функция,

$$\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = 0. \tag{3.5}$$

Наряду с задачей (3.3), (3.4) при каждом $\tau \geq t_0$ рассмотрим задачу с замороженным коэффициентом $\alpha(\tau)$ и точными данными

$$\begin{aligned}\left(\frac{dv(t,\tau)}{dt}, v(t,\tau) - y\right) \quad &+ \quad \gamma(t)[(Av(t,\tau)) + \alpha(\tau)v(t,\tau) - f, v(t,\tau) - y) + \\ &+ \quad \varphi(v(t,\tau)) - \varphi(y)] \leq 0 \quad \forall y \in H, \ \ v(t,\tau) \in H,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$v(t_0,\tau)=u_0. \tag{3.7}$$

Пусть задачи (3.3), (3.4) и (3.6), (3.7) имеют единственные решения класса $C^1[t_0,+\infty)$, причем решение $u(t)$ ограничено на $[t_0,+\infty)$.

Условие (3.5) и теорема 1 гарантируют сходимость решения $x_\alpha(\tau)$ смешанного вариационного неравенства

$$(Ax_\alpha(\tau)+\alpha(\tau)x_\alpha(\tau)-f,x_\alpha(\tau)-y)+\varphi(x_\alpha(\tau))-\varphi(y)\le 0, \quad x_\alpha(\tau)\in H \quad \forall y\in H \tag{3.8}$$

к нормальному решению $x^*$ неравенства (1.1) при $\tau\to\infty$.

Положим в (3.6) $y=x_\alpha(\tau)$, а в (3.8), умноженном на $\gamma(t)$, примем $y$ равным $v(t,\tau)$, и сложив полученные результаты, с учетом монотонности оператора $A$ придем к неравенству

$$\frac{d\|v(t,\tau)-x_\alpha(\tau)\|^2}{dt}\le -2\gamma(t)\alpha(\tau)\|v(t,\tau)-x_\alpha(\tau)\|^2, \tag{3.9}$$

причем $\|v(t_0,\tau)-x_\alpha(\tau)\|^2=\|u_0-x_\alpha(\tau)\|^2\le a_1$ при всех $\tau\ge t_0$, здесь $a_1>0$. Следовательно, (см. [6], с.264)

$$\|v(t,\tau)-x_\alpha(\tau)\|^2\le a_1 exp(-2\alpha(\tau)\int_{t_0}^t\gamma(s)ds). \tag{3.10}$$

Из сходимости $x_\alpha(\tau)\to x^*$ при $\tau\to+\infty$ и из (3.10) имеем ограниченность в совокупности величин $\|v(t,\tau)\|$ при $t,\ \tau\ge t_0$.

Пусть

$$\int_{t_0}^t\gamma(s)ds=+\infty; \tag{3.11}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha'(t)}{\gamma(t)\alpha^2(t)}=0. \tag{3.12}$$

Положив в (3.10) $t=\tau$ и применив правило Лопиталя под знаком экспоненты, в силу (3.11) и (3.12) установим сходимость $\|v(\tau,\tau)-x_\alpha(\tau)\|$ к нулю при $\tau\to+\infty$.

Полагая в (3.3) $y=v(t,\tau)$, а в (3.6) – $y=u(t)$, после сложения результатов с учетом предположений a) – c) имеем (см. [6], с.266)

$$\begin{aligned}\frac{d\|u(t)-v(t,\tau)\|^2}{dt} &+ 2\gamma(t)\alpha(t)\|u(t)-v(t,\tau)\|^2\le\\ &\le a_2\gamma(t)[h(t)+\delta(t)+\alpha'(t)(t-\tau)]\|u(t)-v(t,\tau)\|+\\ &+ 2\gamma(t)\sigma(t)[q(\|u(t)\|)+q(\|v(t,\tau)\|)], \quad t\le\tau,\ \ a_2>0.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Сделаем следующие предположения:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\delta(t)+h(t)+\sigma(t)}{\alpha(t)}=0; \tag{3.14}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma(t)\alpha'(t)}{\gamma^2(t)\alpha^2(t)+(\gamma(t)\alpha(t))'}=0; \tag{3.15}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty}\alpha(t)\gamma(t)dt=+\infty. \tag{3.16}$$

Тогда из (3.13), используя лемму из [6], с.264 и правило Лопиталя (см. [11]), выводим сходимость $u(\tau) - v(\tau,\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$. Таким образом, доказана стабилизация $u(t)$ к $x^*$ при $t \to +\infty$.
Отметим, что предположения (3.5) и (3.16) позволяют опустить условие (3.11).

Теперь построим непрерывный метод регуляризации первого порядка на основе метода регуляризации по функционалу. Запишем основную и вспомогательные задачи

$$\begin{aligned}(\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t) - y) \quad &+ \quad \gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t)) - f(t), \tilde{u}(t) - y) + \varphi(t)(\tilde{u}(t)) + \alpha(t)\|\tilde{u}(t)\|^2 - \\ &- \quad \varphi(t)(y) - \alpha(t)\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde{u}(t) \in H, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\tilde{u}(t_0) = u_0 \in H, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\tilde{v}(t,\tau)}{dt}, \tilde{v}(t,\tau) - y\right) + \gamma(t)[(A\tilde{v}(t,\tau) - f, \tilde{v}(t,\tau) - y) + \varphi(\tilde{v}(t,\tau)) + \\ &+ \quad \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2 - \varphi(y) - \alpha(\tau)\|y\|^2] \le 0 \quad \forall y \in H, \ \ \tilde{v}(t,\tau) \in H,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\tilde{v}(t_0, \tau) = u_0 \quad \forall \tau \ge t_0, \tag{3.20}$$

однозначная разрешимость которых в $C^1[t_0, +\infty)$ и ограниченность $\tilde{u}(t)$ на $[t_0, +\infty)$ предполагаются.

Приняв в (3.19) $y = \xi\tilde{v}(t,\tau) + (1-\xi)z_\alpha(\tau)$, где $\xi \in (0,1)$, $z_\alpha(\tau)$ – решение регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$\begin{aligned}(Az_\alpha(\tau) \quad &- \quad f, z_\alpha(\tau) - y) + \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)\|z_\alpha(\tau)\|^2 - \varphi(y) - \\ &- \quad \alpha(\tau)\|y\|^2 \le 0, \ \ z_\alpha(\tau) \in H \quad \forall y \in H,\end{aligned} \tag{3.21}$$

приходим к неравенству

$$(1-\xi)\left(\frac{d\tilde{v}(t,\tau)}{dt}, \tilde{v}(t,\tau) - z_\alpha(\tau)\right) + \gamma(t)(1-\xi)[(A\tilde{v}(t,\tau) - f, \tilde{v}(t,\tau) - z_\alpha(\tau)) +$$

$$+\varphi(\tilde{v}(t,\tau)) + \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2 - \varphi(\xi\tilde{v}(t,\tau) +$$
$$+(1-\xi)z_\alpha(\tau)) - \alpha(\tau)\|\xi\tilde{v}(t,\tau) + (1-\xi)z_\alpha(\tau)\|^2] \le 0.$$

Учитывая здесь выпуклость $\varphi(x)$ и сильную выпуклость функционала $\|x\|^2$, после сокращения на $1-\xi$ получаем неравенство

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\tilde{v}(t,\tau)}{dt}, \tilde{v}(t,\tau)\right. \quad &- \quad \left. z_\alpha(\tau)\right) + \gamma(t)[(A\tilde{v}(t,\tau) - f, \tilde{v}(t,\tau) - z_\alpha(\tau)) + \\ &+ \quad \varphi(\tilde{v}(t,\tau)) - \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)(\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2 - \|z_\alpha(\tau)\|^2) + \\ &+ \quad \alpha(\tau)\xi\|\tilde{v}(t,\tau) - z_\alpha(\tau)\|^2] \le 0.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Из (3.21) при $y = \tilde{v}(t,\tau)$ имеем

$$(Az_\alpha(\tau) - f, z_\alpha(\tau) - \tilde{v}(t,\tau)) + \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)\|z_\alpha(\tau)\|^2 - [\varphi(\tilde{v}(t,\tau)) + \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2] \le 0.$$

Следовательно, приняв во внимание монотонность оператора $A$, из (31) выводим дифференциальное неравенство вида (3.9) для $\|\tilde{v}(t,\tau) - z_\alpha(\tau)\|$. Таким образом, в наших условиях доказана сходимость к нулю $\|\tilde{v}(\tau,\tau) - z_\alpha(\tau)\|$ при $\tau \to +\infty$. Установим, что

$\|\tilde{v}(\tau,\tau)-\tilde{u}(\tau)\| \to 0$ при $\tau \to +\infty$. Для этого примем в (3.17) $y$ равным $\xi\tilde{u}(t)+(1-\xi)\tilde{v}(t,\tau)$, $\xi \in (0,1)$ и подобно (3.22) докажем справедливость неравенства

$$(\tilde{u}'(t),\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t,\tau))+\gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t)-f(t),\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t,\tau))+\varphi(t)(\tilde{u}(t))-$$
$$-\ \varphi(t)(\tilde{v}(t,\tau))+\alpha(t)(\|\tilde{u}(t)\|^2-\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2)+\alpha(t)\|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t,\tau)\|^2]\le 0. \tag{3.23}$$

Кроме того, из (3.19) при $y=\tilde{u}(t)$ имеем

$$\left(\frac{d\tilde{v}(t,\tau)}{dt},\tilde{v}(t,\tau)-\tilde{u}(t)\right)+\gamma(t)[(A\tilde{v}(t,\tau)-f,\tilde{v}(t,\tau)-\tilde{u}(t))+\varphi(\tilde{v}(t,\tau))+$$

$$+\alpha(\tau)\|\tilde{v}(t,\tau)\|^2-\varphi(\tilde{u}(t))-\alpha(\tau)\|\tilde{u}(t)\|^2]\le 0.$$

Прибавляя к (3.23) последнее неравенство, придем к неравенству (сравни с (3.13))

$$\frac{d\|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t,\tau)\|^2}{dt}+2\gamma(t)\alpha(t)\|\tilde{u}(t)-\tilde{v}(t,\tau)\|^2\le$$

$$\le \tilde{a}_3\gamma(t)[h(t)+\delta(t)+\sigma(t)+\alpha'(t)(t-\tau)],\quad t\le\tau,\ \ \tilde{a}_3>0.$$

Таким образом, доказано утверждение.

**Т е о р е м а 3.1.** *Пусть в условиях теоремы 1 данные смешанного вариационного неравенства (1.1) заданы приближенно, т.е. вместо $A$, $f$ и $\varphi$ известны семейства $\{A(t)\}$, $\{f(t)\}$, $\{\varphi(t)\}(t\ge t_0\ge 0)$, удовлетворяющие условиям a) – c), эволюционные задачи (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.17), (3.18) и (3.19), (3.20) однозначно разрешимы в классе функций $C^1[t_0,+\infty)$, причем решения $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ ограничены на $[t_0,+\infty)$, $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ – положительные дифференцируемые функции при $t\ge t_0$, $\alpha(t)$ выпукла и убывает, и выполнены условия (3.5), (3.12), (3.14) – (3.16). Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(t)-x^*\|=\lim_{t\to+\infty}\|\tilde{u}(t)-x^*\|=0,$$

*где $x^*$ – нормальное решение смешанного вариационного неравенства (1.1).*

**З а м е ч а н и е 3.1.** *Пусть существуют число $R>0$ и элемент $x_0\in H$ такие, что*

$$(Ax-f,x-x_0)+\varphi(x)-\varphi(x_0)>0 \quad \text{при} \quad \|x\|\ge R. \tag{3.24}$$

*Отметим, что (3.24) есть одно из достаточных условий разрешимости смешанного вариационного неравенства (1.1) (см.* [12]*, с.187). Предположим также, что*

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t}\le G,\quad 0\le G<\infty, \tag{3.25}$$

$$\overline{\lim}_{t\to+\infty}\frac{q(t)}{t^2}\le Q,\quad 0\le Q<\infty. \tag{3.26}$$

*В условиях (3.24) – (3.26) докажем ограниченность решения $u(t)$ задачи (3.3), (3.4) при $t\ge t_0$. Пусть $\|u(t)\|\to\infty$ при $t\to+\infty$. Положив в (3.3) $y=x_0$ и используя условия a) – c), имеем*

$$\left(\frac{d(u(t)-x_0)}{dt},u(t)-x_0\right)+\gamma(t)[(Au(t))-f,u(t)-x_0)+\varphi(u(t))-\varphi(x_0)]+$$

$$+\gamma(t)\alpha(t)\Bigg\{\|u(t)\|^2-\|u(t)\|\,\|x_0\|-\left(\frac{h(t)}{\alpha(t)}g(\|u(t)\|)+\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\right)(\|u(t)\|+\|x_0\|)-$$

$$-\frac{\sigma(t)}{\alpha(t)}[q(\|u(t)\|)+q(\|x_0\|)]\Bigg\}\le 0.$$

*В силу (3.24) – (3.26) и (3.14) из последнего неравенства при достаточно больших* $t$ *выводим оценку* $d(\|u(t)-x_0\|)/dt\le 0$. *Значит, функция* $\rho(t)=\|u(t)-x_0\|$ *не возрастает при достаточно больших* $t$, *что противоречит предположению о неограниченности* $\|u(t)\|$. *Аналогичное утверждение имеет место и для решения задачи (3.17), (3.18).*

**Замечание 3.2.** *Для доказательства существования решений построенных в данной работе смешанных вариационных неравенств мы пользовались теоремой 8.5 из* [1], *с.265, где псевдомонотонный оператор по определению считается ограниченным(см. там же, с.190). В остальных рассуждениях доказательств теорем 1 – 3 ограниченность* $A$ *не использовалась. Если в* [1] *при доказательстве теоремы 8.2 применить утверждения из* [13], *то требование ограниченности оператора* $A$ *можно снять.*

**Замечание 3.3.** *Можно рассматривать смешанное вариационное неравенство (1.1) не на всем пространстве* $H$, *а на выпуклом замкнутом множестве* $\Omega$ *из* $H$. *Теоремы существования решений таких неравенств имеются в [12], с. 187. Из теоремы 2 вытекает сходимость изученного в данной работе метода регуляризации для смешанного вариационного неравенства*

$$(Ax-f,x-y)+\varphi(x)-\varphi(y)\le 0,\quad x\in\Omega\quad \forall y\in\Omega$$

*при невозмущенном множестве* $\Omega$.

**Замечание 3.4.** *Если определенным образом (см.* [3] *и* [4]*) усложнить регуляризованные задачи, то от требований (3.25), (3.26) можно будет отказаться.*

## Список литературы


1. Лионс Ж.–Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

2. Pascali D., Sburlan S., *Nonlinear operators of monotone type*, R. S. R., Bucuresti, 1978.

3. Лисковец О.А., “Регуляризация смешанных вариационных неравенств”, *ДАН СССР*, **317**:2 (1991), 300–304.

4. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979.

6. Васильев Ф.П., *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981.

7. Васильев Ф.П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988.

8. Антипин А.С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"АН СССР*, 1989, 5–43.

9. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1988.

10. Рязанцева И.П., “Регуляризованные методы первого порядка для монотонных вариационных неравенств с оператором обобщенного проектирования”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:11 (2005), 1954–1962..

11. Alber Ya., Ryazantseva I., “On regularized evolution equations with operators of monotone type”, *Funct. Differential Equations*, **7**:4 (2000), 177–187..

12. Kluge R., *Nichtlinear Variationsungleihungen und Exrtemalaufgaben*, Dtsch. Verl. Wiss., Berlin, 1974.

13. Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **11**:3 (1972), 251–294..

# First-order regularized continuous methods for mixed variational inequalities

© **I.P. Ryazantseva**[2]

**Abstract.** First-order regularized continuous and operator methods by operator and by functional are constructed for mixed variational inequalities in Hilbert space with monotone operator and property convex functional. Sufficient conditions of convergence to normal solution of initial problem are obtained.

**Key Words:** mixed variational inequality, continuous method, monotone operator, convex functional.

[2] Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru