УДК 517.938

Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

© Т.М. Митрякова[1], О.В. Починка,[2], А.Е. Шишенкова[3]

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции у диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Построенная функция является функцией Морса, тесно связанной с динамикой каскада рассматриваемого класса. Построение для данной динамической системы энергетической функции — функции, невозрастающей вдоль траекторий динамической системы во многих случаях является ключом к пониманию структуры искуственной нейронной сети. Именно на существовании такой функции основан метод Хебба обучения персептрона.

Ключевые слова: дискретные динамические системы, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция, функция Морса, обучение персептрона.

1. Введение

Пусть M^n — гладкое ориентируемое замкнутое n-многообразие с метрикой d и $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм. ε*-цепью длины* m, соединяющей точку $x \in M^n$ с точкой $y \in M^n$ для диффеоморфизма f называется последовательность $x = x_0, \dots, x_m = y$ точек в M^n такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq m$. Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует m, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины m, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек $f: M^n \to M^n$ называется *цепно рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathcal{R}_f$. Заметим, что цепно рекуррентное множество инвариантно и замкнуто. Введем на множестве $\mathcal{R}_f$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точку x с точкой y и ε-цепь, соединяющая точку y с точкой x. Две такие точки называются *цепно эквивалентными.* Класс эквивалентности называется цепной компонентой $\mathcal{R}_f$.

Следуя идеям А. М. Ляпунова, К. Конли ввел понятие *функции Ляпунова*, как непрерывной функции, убывающей вдоль траекторий вне цепно реккурентного множества и постоянной на цепных компонентах. Факт существования такой функции у любой динамической системы доказан К. Конли [5] в 1978 году и назван позже *фундаментальной теоремой динамических систем.*

Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* для диффеоморфизма f, если множество критических точек функции φ совпадает с цепно рекуррентным множеством R_f.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [11], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса (см. определение в следующем разделе), у *градиентно-подобного потока*

---

[1] Старший преподаватель, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[2] Доцент, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

[3] Доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

(потока Морса-Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [6] в 1968 году обощил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса-Ботта[4], для потока Морса-Смейла.

В 1977 году Д. Пикстон [9] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях. Кроме того, он построил диффеоморфизм на 3-сфере, не обладающий энергетической функцией и объяснил, что этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек. В работах [1], [2], [3] достигнут значительный прогресс в нахождении условий существования энергетической функции на 3-многообразиях, а именно показано, что условия существования энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f: M^3 \to M^3$ связаны с типом вложения глобальных аттракторов и репеллеров, являющихся замыканиями одномерных неустойчивых и устойчивых многообразий соответственно седловых периодических точек.

В настоящей работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданных на ориентируемых замкнутых поверхностях M^2. Основным результатом является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in \Phi$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты РФФИ 11-01-12056-офи-м, 12-01-00672, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

2. Вспомогательные факты

2.1. Функция Морса-Ляпунова

Так как цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ конечно, то оно состоит из периодических точек и естественно искать энергетическую функцию и функцию Ляпунова для f в классе функций Морса.

Напомним определение функции Морса. Если X — гладкое n-многообразие и $f: X \to \mathbb{R}$ — C^r-гладкая ($r \geq 2$) функция, то точка $p \in X$ называется *критической* точкой f, если $gradf(p) = 0$, то есть $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$ в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ точки p. При этом, точка p называется *невырожденной*, если матрица вторых производных (*матрица Гесса*) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ невырождена, в противном случае — точка p называется *вырожденной*. Функция f называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

В силу симметричности, матрица Гесса имеет только действительные собственные значения и число ее отрицательных собственных значений называют *индексом критической точки* p и обозначают I_p.

[4] C^r-гладкая ($r \geq 2$) функция $f: X \to \mathbb{R}$ на гладком n-многообразии X называется *функцией Морса-Ботта*, если Гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *(Лемма Морса) Пусть p — невырожденная критическая точка функции Морса $f : X \to \mathbb{R}$. Тогда существуют локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в точке p, называемые координатами Морса, в которых локальное представление f имеет вид*

$$f_p(x_1, \ldots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \cdots + x_n^2,$$

где $q = I_p$ — индекс f в точке p.

В следующем предложении изложены свойства функции Ляпунова, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *([2]) Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Ляпунова, являющаяся функцией Морса для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$. Тогда*

1) $-\varphi$ — функция Ляпунова для f^{-1};

2) если p — периодическая точка f, то $\varphi(x) < \varphi(p)$ для любой точки $x \in W_p^u \setminus p$ и $\varphi(x) > \varphi(p)$ для любой точки $x \in W_p^s \setminus p$;

3) если p — периодическая точка f, то p — критическая точка φ с индексом $\dim W_p^u$.

Согласно пункту 2) приведенного выше предложения, точка p является максимумом (соотв. минимумом) ограничения φ на неустойчивой (соотв. устойчивое) многообразие W_p^u (соотв. W_p^s). Если при этом максимум (соотв. минимум) является невырожденным, то, следуя работе [2], назовем функцию Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ *функцией Морса-Ляпунова.* Везде далее под *энергетической функцией* диффеоморфизма f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством мы будем понимать функцию Морса-Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *([2]) Пусть $\mathcal{O}$ — гиперболическая периодическая орбита диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$, $p \in \mathcal{O}$ и $q = \dim W_p^u$. Тогда существует окрестность $U_{\mathcal{O}}$ орбиты $\mathcal{O}$ и энергетическая функция $\varphi : U_{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$ для f такая, что $(W_p^u \cap U_{\mathcal{O}}) \subset Ox_1 \ldots x_q$, $(W_p^s \cap U_{\mathcal{O}}) \subset Ox_{q+1} \ldots x_n$ для координат Морса $x_1, \ldots, x_n$ функции φ в окрестности точки p.*

2.2. Динамические свойства диффеоморфизмов класса Φ

Пусть $f : M^2 \to M^2$ — диффеоморфизм класса Φ. Заметим, что согласно [10], гиперболичность цепно рекуррентного множества равносильна Ω-устойчивости диффеоморфизма $f \in \Phi$. Следовательно, периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, то есть $i \le j$, если $W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset$. Не уменьшая общности будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1, \ldots, k_f$ положим $W_i^s = W^s_{\mathcal{O}_i}$,$W_i^u = W^u_{\mathcal{O}_i}$ и для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W_j^u$, $R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W_j^s$.

Для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $p_i : V_i \to \hat{V}_i$ — естественную проекцию.

Пусть Ω_q, $q \in \{0,1,2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim\ W^u_r = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса (индекс Морса периодической точки r равен размерности $\dim\ W^u_r$), меньшим или равным q.

В работе [7] установлены следующие свойства диффеоморфизмов $f \in \Phi$.

Предложение 2.4. *Пусть $f \in \Phi$. Тогда*

1) $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$;

2) W^u_i является гладким подмногообразием многообразия M^2;

3) множество A_i является аттрактором диффеоморфизма $f \in \Phi$;

4) $(cl\ W^u_{i+1} \setminus W^u_{i+1}) \subset A_i$.

Предложение 2.5. *Пусть $f \in \Phi$. Тогда*

1) проекция $p_i : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$ и отображение η_i, состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{v}_i} : \pi_1(\hat{v}_i) \to \mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности $\hat{v}_i$ многообразия $\hat{V}_i$;

2) многообразие $\hat{V}_i$ состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

Следующее предложение можно доказать аналогично лемме 3.2.1 книги [4].

Предложение 2.6. *В каждой компоненте связности множества V_i, $i = k_0, \dots, k_1 - 1$ существует окружность такая, что объединение этих окружностей пересекается с каждой сепаратрисой множества $W^u_{i+1} \setminus \mathcal{O}_{i+1}$ в одной точке.*

Согласно определению аттрактора, множество A_i обладает захватывающей окрестностью M_i, где M_i компактное множество такое, что $f(M_i) \subset int\ M_i$ (M_i — f-сжимаема) и $\bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(M_i) = A_i$ (см., например, [10]). Для $i = 1, \dots, k_1$ обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i, через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i. Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Аналогично работе [3], дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Захватывающую окрестность M_i, $i = 1, \dots, k_1$ аттрактора A_i назовем тесной, если M_i состоит из c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i.*

Если при этом для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W^s_\sigma \cap M_i$ состоит в точности из одного отрезка, то окрестность M_i будем называть канонической.

Лемма 2.1. *Каждый аттрактор A_i, $i = 1, \dots, k_1$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ обладает канонической окрестностью.*

Доказательство. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование канонической окрестности M_i для A_i.

Пусть $i = 1$. Согласно предложению 2.3., существует окрестность $U_{A_1} \subset W^s_{A_1}$ нульмерного аттрактора A_1 и энергетическая функция $\varphi_{A_1} : U_{A_1} \to \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{A_1}(A_1) = 0$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждая компоненита связности множества $M_1 = \varphi^{-1}_{A_1}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2) \in U_{A_1} : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах x_1, x_2. Тогда M_1 — каноническая окрестность для нульмерного аттрактора A_1, которая является объединением c_1 двумерных дисков.

Предположим, что существует каноническая окрестность M_{i-1} аттрактора A_{i-1}. Докажем существование канонической окрестности для i. Рассмотрим два случая: 1) $i \leq k_0$; 2) $i > k_0$.

В случае 1), как выше, существует каноническая окрестность M_i нульмерного аттрактора A_i, являющаяся объединением c_i попарно не пересекающихся 2-дисков.

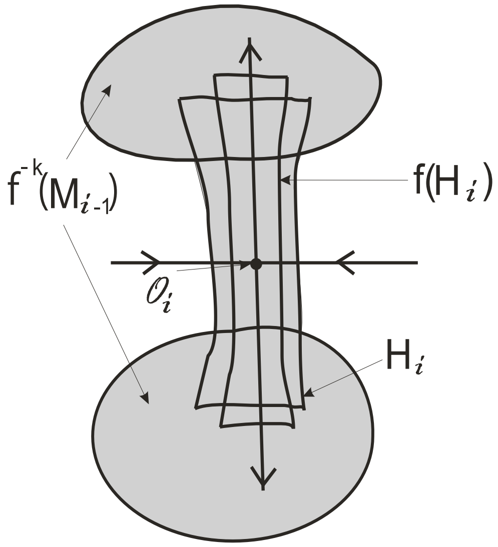

Рисунок **2.1**

В случае 2) согласно предложению 2.3., существует окрестность $U_{\mathcal{O}_i}$ орбиты $\mathcal{O}_i$ и энергетическая функция $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \to \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = 0$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента связности $H_i = \varphi^{-1}_{\mathcal{O}_i}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2) \in U_{\mathcal{O}_i} : -x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах x_1, x_2. В силу λ-леммы, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-k}(\partial M_{i-1})$ пересекает каждую компоненту связности $H_i \setminus W^s_i$ и $f(H_i \setminus W^s_i)$ в точности по одному отрезку и $f(H_i) \setminus int\, f^{-k}(M_{i-1}) \subset int\, H_i$ (см. рисунок 2.1). Положим $M_i = f^{-k}(M_{i-1}) \cup H_i$.

Аналогично теореме 2.2.2 книги [4] можно доказать, что M_i захватывающая окрестность аттрактора A_i. Покажем, что она является канонической. Для этого достаточно проверить, что она является объединением c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i

По построению M_i состоит из c_i компонент связности, каждая из которых является диском с дырами. Обозначим через g_{M_i} общее число дыр множества M_i. Покажем, что $g_{M_i} = g_i$.

Во введенных, обозначениях число точек в орбите $\mathcal{O}_i$ равно $(r_i - r_{i-1})$. Поскольку $A_i = A_{i-1} \cup W^u_{\mathcal{O}_i}$ и $cl\, W^u_{\mathcal{O}_i} \setminus W^u_{\mathcal{O}_i} \subset A_{i-1}$, то $c_i \leq c_{i-1}$. Заметим, что число компонент связности множества $H_i \setminus int\, f^{-k}(M_{i-1})$ равно $(r_i - r_{i-1})$. По построению каждая из этих компонент является диском и среди них имеется $((r_i - r_{i-1}) - (c_{i-1} - c_i))$ дисков, удалением которых из множества M_i получается множество, вновь состоящее из c_i компонент связности. Тогда общее число дыр $g_{M_{i-1}}$ множества M_{i-1} вычисляется по формуле $g_{M_{i-1}} = g_{M_i} - ((r_i - r_{i-1}) - (c_{i-1} - c_i))$, откуда $g_{M_i} = g_{M_{i-1}} + r_i - r_{i-1} - c_{i-1} + c_i$. Поскольку $g_{M_{i-1}} = g_{i-1}$, то $g_{M_i} = c_{i-1} + r_{i-1} - s_{i-1} + r_i - r_{i-1} - c_{i-1} + c_i = c_i + r_i - s_{i-1}$. Так как $s_{i-1} = s_i$, то $g_{M_i} = g_i$.

Сглаживая множество M_i получаем искомую каноническую окрестность.

Доказательство закончено.

Аналогично лемме 7.2.1 книги [4] можно доказать следующее предложение.

Предложение 2.7. *Пусть* $i \in \{1, \ldots, k_1\}$ *и* Q_i *— захватывающая окрест-*

ность аттрактора A_i такая, что ∂Q_i — линия уровня энергетической функции φ_{Q_i} : $Q_i \to \mathbb{R}$. Тогда для любой тесной окрестности P_i атрраткора A_i существует энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \to \mathbb{R}$ для f с множеством уровня ∂P_i.

3. Построение энергетической функции для $f \in \Phi$

Разобьем построение энергетической функции для $f : M^2 \to M^2$ на шаги.

Шаг 1. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование энергетической функции φ_{M_i} на канонической окрестности M_i аттрактора A_i с множеством уровня $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1$ аттрактор A_1 совпадает со стоковой орбитой $\mathcal{O}_1$ диффеоморфизма f. В силу предложения 2.3., существует окрестность $U_{\mathcal{O}_1} \subset M^2$ орбиты $\mathcal{O}_1$, оснащенная энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_1} : U_{\mathcal{O}_1} \to \mathbb{R}$ для f и такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) = 1$. В силу предложения 2.7., существует энергетическая функция φ_{M_1} на окрестности M_1 аттрактора A_1 с множеством уровня S_1.

Пусть по предположению индукции существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на окрестности M_{i-1} аттрактора A_{i-1} с множеством уровня S_{i-1}. Построим функцию φ_{M_i}. Рассмотрим две возможности: a) $i \leq k_0$; b) $i > k_0$.

В случае a) окрестность M_i состоит из c_i попарно не пересекающихся двумерных дисков. В силу предположения индукции и предложения 2.7. существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на канонической окрестности M_{i-1}, постоянная на ∂M_{i-1}. Аналогично случаю $i = 1$ доказывается существование энергетической функции $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ на $U_{\mathcal{O}_i}$ с множеством уровня $\partial U_{\mathcal{O}_i}$. Тогда функция φ_{M_i}, составленная из функций $\varphi_{M_{i-1}}$ и $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ является искомой.

В случае b) орбита $\mathcal{O}_i$ имеет окрестность $U_{\mathcal{O}_i} \subset M^2$, оснащенную энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \to \mathbb{R}$ для f с $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = i$. Более того, для каждой компоненты связности U_σ, $\sigma \in \mathcal{O}_i$ множества $U_{\mathcal{O}_i}$ существуют координаты Морса (x_1, x_2) такие, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(x_1, x_2) = i - x_1^2 + x_2^2$, ось Ox_1 содержится в неустойчивом многообразии, а ось Ox_2 содержится в устойчивом многообразии точки σ.

Из свойств канонической окрестности M_i и λ-леммы следует существование трубчатой окрестности $N(D_i) \subset M_i$ дисков $D_i = M_i \cap W^s_{\mathcal{O}_i}$ такой, что $N(D_i) \cap A_{i-1} = \emptyset$, множество $P_{i-1} = M_i \setminus int\ N(D_i)$ является f-сжимаемым и ∂P_{i-1} трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\varphi^{-1}_{\mathcal{O}_i}(i) \setminus \mathcal{O}_i$ по двум точкам. Множество P_{i-1} является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}. По предположению индукции и предложению 2.7. на окрестности P_{i-1} существует энергетическая функция $\varphi_{P_{i-1}}$ с множеством уровня ∂P_{i-1}.

Для $\varepsilon_i \in (0,1)$, $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $P_t = \varphi^{-1}_{P_{i-1}}([1, \varphi_{P_{i-1}}(\partial P_{i-1}) - \varepsilon_i + t])$, $H_t = \{x \in U_{\mathcal{O}_i} : \varphi_{\mathcal{O}_i}(x) \leq i + t\}$ и $E_{\varepsilon_i} = (P_{\varepsilon_i} \setminus int\ P_{-\varepsilon_i}) \cap (H_{\varepsilon_i} \setminus int\ H_{-\varepsilon_i})$ (см. рисунок 3.1). Заметим, что $P_{\varepsilon_i} = P_{i-1}$ и, следовательно, $f(P_{\varepsilon_i}) \subset int\ P_{\varepsilon_i}$. Так как $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ — функция Ляпунова для $f|_{U_{\mathcal{O}_i}}$, то $\varphi_{\mathcal{O}_i}(f^{-1}(\varphi^{-1}_{\mathcal{O}_i}(i) \setminus \mathcal{O}_i)) > i$ и, следовательно, $(H_0 \setminus \mathcal{O}_i) \subset int\ f^{-1}(H_0 \setminus \mathcal{O}_i)$. Отсюда и из условий выбора окрестности $N(D_i)$ следует существование значения ε_i со следующими свойствами:

(1) $f(P_{\varepsilon_i}) \subset int\ P_{-\varepsilon_i}$;

(2) для любого $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ ∂P_t трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\partial H_t \setminus D_i$ по двум точкам;

(3) $f^{-1}(E_{\varepsilon_i}) \cap H_{\varepsilon_i} = \emptyset$.

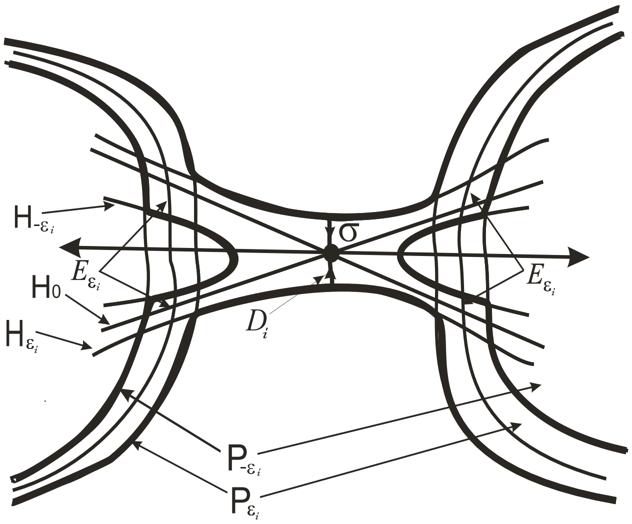

Рисунок **3.1**

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $Q_t = P_t \cup H_t$. По построению множество Q_t, $t \neq 0$ является f-сжимаемым. Более того, $Q_{-\varepsilon_i}$ после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1}, а Q_{ε_i} после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_i. В силу предположения индукции и леммы 2.7., на множестве $Q_{-\varepsilon_i}$ существует энергетическая функция $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}$, постоянная на $\partial Q_{-\varepsilon_i}$. Поскольку $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(A_{i-1}) \leq i-1$, то можно считать, что $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(Q_{-\varepsilon_i}) = i - \varepsilon_i$.

Определим на множестве Q_{ε_i} функцию $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}} : Q_{\varepsilon_i} \to \mathbb{R}$ формулой:

$$\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x) = \begin{cases} \varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(x), \text{ если } x \in Q_{-\varepsilon_i}; \\ i + t, \text{ если } x \in Q_t \end{cases}$$

Проверим, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}$ является энергетической функцией для f, тогда существование искомой функции $\varphi_{M_i} : M_i \to \mathbb{R}$ будет следовать из предложения 2.7..

Представим множество Q_{ε_i} в виде объединения подмножеств с попарно непересекающимися внутренностями: $Q_{\varepsilon_i} = A \cup B \cup C$, где $A = Q_{-\varepsilon_i}$, $B = P_{\varepsilon_i} \setminus Q_{-\varepsilon_i}$ и $C = Q_{\varepsilon_i} \setminus (P_{\varepsilon_i} \cup Q_{-\varepsilon_i})$. По построению функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_A$ является энергетической функцией для f, $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(\partial A) = i - \varepsilon_i$, функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_B$ не имеет критических точек и функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ совпадает с функцией $\varphi_{\mathcal{O}_i}|_C$. Проверим свойство убывания функции $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}$ вдоль траекторий.

Если $x \in A$, то $f(x) \in A$ и $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$, поскольку $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_A$ — функция Ляпунова. Если $x \in B$, то, в силу условия (1) выбора ε_i, $f(x) \in A$ и, следовательно, $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x) > i - \varepsilon_i$, а $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < i - \varepsilon_i$, откуда $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$. Если $x \in C$, то, в силу условия (3) выбора ε_i, либо $f(x) \in A$ и убывание доказывается аналогично случаю $x \in B$, либо $f(x) \in C$ и убывание следует из того, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ — функция Ляпунова.

Шаг 2. Заметим, что множество источников Ω_2 является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} и, следовательно имеет каноническую окрестность $\tilde{M}$. Аналогично шагу 1 построим энергетическую функцию $\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}$ для f^{-1} на окрестности $\tilde{M}$ с множеством уровня $\tilde{S} = \partial \tilde{M}$.

Шаг 3. По построению множество $P_{k_1} = M^2 \setminus int\ \tilde{M}$ является тесной окрестностью аттрактора A_{k_1}, откуда следует существование искомой функции φ. Действительно, в силу предложения 2.7., из существования энергетической функции $\varphi_{M_{k_1}}$ на окрестности M_{k_1} аттрактора A_{k_1} следует существование энергетической функции $\varphi_{P_{k_1}}$ на P_{k_1} с множеством уровня ∂P_{k_1}. Функцию $\varphi_{P_{k_1}}$ можно построить так, что $\varphi_{P_{k_1}}(\widetilde{S}) =$

$k_f+1-\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(\tilde{S})$. Поскольку $\partial P_{k_1}=\tilde{S}$, то искомая функция φ определяется формулой $\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_{P_{k_1}}(x), \text{ если } x\in P_{k_1};\\ k_f+1-\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(x), \text{ если } x\in\tilde{M}.\end{cases}$

Список литературы

1. Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В., “Энергетическая функция для градиентно-подобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях”, *ДАН*, **422**:3 (2008), 299 – 301..

2. Grines V., Laudenbach F., Pochinka O., “Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Moscow Math. Journal*, 2009, № 4, 801 – 821.

3. Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В., “О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях”, *ДАН*, **440**:1 (2011), 7 – 10.

4. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований., Ижевск, 2011.

5. Conley C., *solated Invariant Sets and Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Math, 1978, 38 с.

6. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031 – 1040.

7. Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е., “О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *Журнал СВМО*, **13**:1 (2011), 142 – 151.

8. Palis J., “On Morse-Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385 – 404.

9. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167 – 172.

10. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press, 1999, 506 с.

11. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199 – 206.

Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set

© T.M. Mitryakova[5], O.V. Pochinka[6], A.E. Shishenkova[7].

Abstract. In the present paper the existence of energy function for diffeomorphisms of surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set is established. The constructed function is Morse function which closely connected with dynamic of the cascade and its existence allows to prove Poincare-Hopf theorem for systems of the considered class. Construction of energy function for this dynamical system, that is a function which is not increasing along trajectories, in many cases is key to understanding of structure of artificial neural network. On the existence of such function Hebb's method of training of perseptron is based.

Key Words: discrete dynamical systems, chain recurrent set, energy function, Morse function, training of perseptron.

[5] Assistant Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[6] Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

[7] Associated Professor of Chair, Agriculture Academy of Nizhniy Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru