*УДК 519.6..517.977.58*

# Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями

© **Ф.В. Лубышев[1], М.Э. Файрузов[2], А.Р. Манапова[3]**

**Аннотация.** Излагается метод разностной аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением.
**Ключевые слова:** задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, метод регуляризации.

## 1. Введение

Особый интерес для исследования представляют физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными уравнениями математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ допускают разрывы. Такие задачи оптимизации наименее изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования подобных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач.

В настоящей работе, по тематике примыкающей к [3]-[13], рассмотрены и исследованы математические постановки задач оптимального управления для полулинейных уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (с условиями сопряжения типа неидеального контакта [9]-[11]). Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных незавышенных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

## 2. Постановка задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями и их корректность

Пусть $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область $\Omega$ разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.
[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.
[3] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

границей» $\overline{S} = \{x_1 = \xi,\ 0 \le x_2 \le l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < x_1 < \xi, \quad 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти $\Omega^-$ и $\Omega^+$) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область $\Omega$ есть объединение областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ и внутренних точек «контактной границы $\overline{S}$» подобластей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области $\Omega$ (в отличие от $S$-внутренней границы области $\Omega$). Далее, будем обозначать через $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей $\Omega_k$ без $S$, $k = 1,2$, так что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части $\Gamma_k$, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета $S$), $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через $n_\alpha$, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области $\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к $S$ в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль $n$ является внешней нормалью к $S$ по отношению к области $\Omega$, то есть нормаль $n$ направлена внутрь области $\Omega_2$. Ниже при постановке краевых задач, $S$ – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, $k = 1,2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей, а именно, рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, разбитой на части внутренней границей S.

**Задача А**. Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^-$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют условиям:
1) Функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, удовлетворяют в $\Omega_k$ уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{k=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1,2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1,2 \tag{2.2}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на $S$ – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы $S$ областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, следующего вида:

$$g(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу (2.1) – (2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ полулинейному уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x) q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$ и условиям сопряжения на внутренней границе $S$ (на границе раздела областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$)

$$\begin{gathered} u(x)=0, \quad x\in\partial\Omega=\overline{\Gamma}_1\cup\overline{\Gamma}_2=(\partial\Omega_1\setminus S)\cup(\partial\Omega_2\setminus S), \\ \big[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big]=0, \quad g(x)=\big(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big)=\theta(x_2)[u], \quad x\in S, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $[u]=u_2(x)-u_1(x)=u^+-u^-$ – скачок функции $u(x)$ на $S$, а $k_\alpha^{(1)}(x), k_\alpha^{(2)}(x), d(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha=1,2$ – известные функции, определяемые по-разному в $\Omega_1$ и $\Omega_2$, обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях $\Omega_k$, $k=1,2$, претерпевающими разрыв на $S$ первого рода; $f_1(x)\equiv g(x)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x)\in W^1_\infty(\Omega_1)\times W^1_\infty(\Omega_2)$, $0<\nu\le k_\alpha(x)\le\overline{\nu}$, $\alpha=1,2$, $x\in\Omega_1\cup\Omega_2$, $d(x)\in L_\infty(\Omega_1)\times L_\infty(\Omega_2)$, $0\le d_0\le d(x)\le\overline{d}_0$, $x\in\Omega_1\cup\Omega_2$, $\theta(x_2)\in L_\infty(S)$, $0<\theta_0\le\theta(x_2)\le\overline{\theta}_0$, $x\in S$, $f_2(x)\in L_2(\Omega_2)$, $\nu,\overline{\nu},d_0,\overline{d}_0,\theta_0,\overline{\theta}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi)$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0)=0, \qquad 0\le q^0\le\dfrac{q_\alpha(\xi_1)-q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}\le L_q<\infty, \quad$ для всех $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$, $\xi_1\ne\xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U=\big\{g(x)=f_1(x)\in H^{(1)}=L_2(\Omega_1):\ g_0\le g(x)\le\overline{g}_0 \text{ п.в. на } \Omega_1\big\}, \tag{2.8}$$

$g_0$, $\overline{g}_0$ – заданные числа, а п.в. – почти всюду. Зададим функционал цели $J:\ U\to\mathbb{R}$ в виде

$$g\to J(g)=\int\limits_{\Omega_1}\Big|u(x_1,x_2;g)-u_0^{(1)}(x)\Big|^2 d\Omega_1=I(u(x,g)),. \tag{2.9}$$

где $u_0^{(1)}\in W^1_2(\Omega_1)$ - заданная функция. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_*\in U$, которое минимизирует на множестве $U\subset H^{(1)}$ функционал цели $g\to J(g)$, точнее, на решениях $u(x)=u(x;g)$ задачи $(2.6)-(2.7)$, отвечающих всем допустимым управлениям $g=f_1\in U$, требуется минимизировать функционал цели $(2.9)$.

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)}=\Omega_1\cup\Omega_2$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)})=\big\{u(x)=(u_1(x),u_2(x))\in W^1_2(\Omega_1)\times W^1_2(\Omega_2)\big\}. \tag{2.10}$$

Здесь $W^1_2(\Omega_k)$, $k=1,2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях $\Omega_k$, $k=1,2$, с границей $\partial\Omega_k$, $k=1,2$ и нормой [1]

$$\|u_k\|_{W^1_2(\Omega_k)}=\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2+u_k^2\right]d\Omega_k, \quad k=1,2. \tag{2.11}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,\vartheta)_V=(u_1,\vartheta_1)_{W^1_2(\Omega_1)}+(u_2,\vartheta_2)_{W^1_2(\Omega_2)}, \quad \|u\|_V^2=\sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W^1_2(\Omega_k)}, \tag{2.12}$$

$V=V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_{S} [u]^2 \, dS. \tag{2.13}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \left\{ u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2) \right\} \tag{2.14}$$

с нормой (2.13):

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{S} [u]^2 \, dS. \tag{2.15}$$

Обобщенным решением задачи А будем называть такую функцию $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q(u, \vartheta) = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[ \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\, q(u)\, \vartheta \right] d\Omega^{(1,2)} + \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \theta(x)[u][\vartheta] dS = \\ = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)\, \vartheta d\Omega^{(1,2)} = l(\vartheta), \qquad \forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

**Т е о р е м а 2.1.** *При любом $g \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ задачи А в смысле определения (2.16). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.16) эквивалентна решению операторного уравнения $A u = F$, где нелинейный оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется равенством $(A u, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u, \vartheta)$, $\forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка $\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}$.*

В дальнейшем, при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию и функционалу сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе [12], с.16 при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи А принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству

$$\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\}, \tag{2.17}$$

и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x,g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leq M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \qquad \forall g \in U, \tag{2.18}$$

где $M = Const > 0$, не зависящая от управления $g(x) = f_1(x) \in U$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.6)-(2.9). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

**Теорема 2.2.** *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $g_* \in U$ *задачи* (2.6)-(2.9), *т.е.* $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. *Множество точек минимума* $U_*$ *функционала цели* $J(g)$ *в экстремальной задаче* (2.6)-(2.9) *слабо бикомпактно в* $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$. *Любая минимизирующая последовательность* $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ *функционала* $J(g)$ *слабо в* $H^{(1)}$ *сходится к множеству* $U_*$.

## 3. Разностная аппроксимация задач для состояния с разрывными коэффициентами и решением. Корректность аппроксимаций

Рассмотрим задачу оптимального управления (2.6)-(2.9) с разрывными коэффициентами и разрывным решением. Для аппроксимации задачи (2.6)-(2.9) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, скалярные произведения и нормы в $\overline{\Omega}$ (по поводу определения сеток, норм и скалярных произведений см. [8]).

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$ на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\omega^{(k)}, k = 1, 2$:

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{x \in \partial\omega^{(k)}} y_k(x)\, \nu_k(x)\, \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями

$$\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = (y_k, y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

$$\tau_1(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)},\ x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2,\ x_1 = 0, \xi; \\ \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \widetilde{\gamma}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)},\ x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2,\ x_1 = \xi, l_1; \\ \dfrac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \widetilde{\gamma}^{(2)}, \end{cases}$$

$\widetilde{\gamma}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника $\Omega_k$, $k = 1, 2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы будет $L_2(\partial\omega^{(1)})$ определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|^2_{L_2(\partial\omega^{(1)})} = \sum_{x_2 \in \overline{\omega}_2} \left[y_1^2(0, x_2) + y_1^2(\xi, x_2)\right] \hbar_2(x_2) + \sum_{x_1 \in \overline{\omega}_1} \left[y_1^2(x_1, 0) + y_1^2(x_1, l_2)\right] \hbar_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{0}{\gamma}{}^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \cap \overset{0}{\Gamma}{}_k \equiv \partial\omega^{(k)} \setminus S_\xi$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\overline{\omega}^{(k)} \subset \overline{\Omega}_k$, $k = 1,2$. Через $L_2\left(\overline{\omega}^{k)}, \gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi} y_k^2(x)h_1h_2 = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x_2\in\omega_2} y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2,$$

$k = 1,2$, индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,\nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi} y_k(x)\nu_k(x)\,h_1h_2, \qquad k = 1,2.$$

В дальнейшем $\|y_k\|^2_{L_2(S_\xi)} = \sum\limits_{x\in S_\xi} y^2(x)h_2 = \sum\limits_{x_2\in\omega_2} y^2(\xi,x_2)h_2$. Нетрудно видеть, что

$$(y_1,\nu_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})} = (y_1,\nu_1)_{L_2(\omega^{(1)+}\times\omega_2)}, \qquad (y_2,\nu_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})} = (y_2,\nu_2)_{L_2(\omega^{(2)-}\times\omega_2)}.$$

Через $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1,2$ справедливы неравенства

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} \le C_{\overline{\omega}^{(k)},\gamma^{(k)}} \|\nabla y_k\|^2, \qquad C_{\overline{\omega}^{(k)},\gamma^{(k)}} = Const > 0, \quad k = 1,2.$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1,y_2)$ : $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x) = (y_1(x),y_2(x)) \in L_2(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)}) \times L_2(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\right\}$, $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x) = (y_1(x),y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)},\gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)},\gamma^{(2)})\right\}$, с нормами

$$\|y\|^2_{\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}. \tag{3.1}$$

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(1)} \subset [0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0) = \{r_1 : 0 \le r_1 \le 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi - 0.5h_1 \le r_1 \le \xi\}$, а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi,l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(2)} \subset [\xi,l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi) = \{r_1 : \xi \le r_1 \le \xi + 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \le r_1 \le l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0,l_2]$: $e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \le r_2 \le x_2 + 0.5h_2\}$, $x_2 \in \omega_2 \subset [0,l_2]$, $e_2(0) = \{r_2 : 0 \le r_2 \le 0.5h_2\}$, $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \le r_2 \le l_2\}$. Далее, через $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1,x_2) = e^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1$ будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1,x_2) = e^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $\nu(x) = \nu_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$. Определим для функций $\nu_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову $S^{x_\alpha}$ по переменным $x_\alpha$:

$$S^{x_1}\nu_1(x) = \tfrac{1}{\hbar_1}\int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)} \nu_1(r_1,x_2)dr_1, \quad x_1 \in \overline{\omega}_1^{(1)}, \quad \hbar_1 = \hbar_1(x_1) = \begin{cases} h_1, & x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, & x_1 = 0,\xi, \end{cases}$$

$$S^{x_2}\nu_1(x) = \tfrac{1}{\hbar_2}\int\limits_{e_2(x_2)} \nu_1(x_1,r_2)dr_2, \quad x_2 \in \overline{\omega}_2, \quad \hbar_2 = \hbar_2(x_2) = \begin{cases} h_2, & x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, & x_2 = 0,l_2, \end{cases}$$

С помощью одномерных операторов $S^{x_\alpha}$, действующих по направлению $x_\alpha$, $\alpha = 1,2$, определим усредняющий оператор $S^x = S^{x_1}S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $\nu_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup S_\xi) \equiv L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)$ будем обозначать пространство сеточных управлений $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$, заданных на сетке $\omega^{(1)} \cup S_\xi$ со скалярным произведением и нормой:

$$\big(\Phi_h, \widetilde{\Phi}_h\big)_{H_h^{(1)}} = \big(\Phi_h, \widetilde{\Phi}_h\big)_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} \Phi_h(x)\widetilde{\Phi}_h(x)h_1h_2 + \tfrac{1}{2}\sum_{x\in S_\xi} \Phi_h(x)\widetilde{\Phi}_h(x)h_1h_2,$$
$$\|\cdot\|^2_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} = \big(\Phi_h, \Phi_h\big)_{H_h^{(1)}}.$$

Задачам оптимального управления $(2.6) - (2.9)$ поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\overline{\omega}^{(1)}} \big|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\big|^2 \hbar_1\hbar_2 = \big\|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\big\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}, \tag{3.2}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x;\Phi_h) = \big(y_1(x;\Phi_h), y_2(x;\Phi_h)\big) \in \overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$, называемая решением разностной краевой задачи для задачи $(2.6)-(2.7)$, удовлетворяет для любой сеточной функции $\nu(x) = \big(\nu_1(x), \nu_2(x)\big) \in \overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}
Q_h(y,v) = \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x)\; y_{1\overline{x}_1}\; v_{1\overline{x}_1}h_1h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x)\; y_{1\overline{x}_2}\; v_{1\overline{x}_2}h_1h_2 + \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)\; y_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)\; v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x)\; y_{2\overline{x}_1}\; v_{2\overline{x}_1}h_1h_2 + \\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x)\; y_{2\overline{x}_2}\; v_{2\overline{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)\; y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)\; v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \\
+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\, q_1(y_1(x))\, \nu_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)\, q_1(y_1(\xi,x_2))\, \nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \\
+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\, q_2(y_2(x))\, \nu_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)\, q_2(y_2(\xi,x_2))\, \nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \\
+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,\big[y(\xi,x_2)\big]\,\big[\nu(\xi,x_2)\big]\,h_2 = \Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}}\Phi_h(x)\,\nu_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\Phi_h(\xi,x_2)\,\nu_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg) + \\
+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)\,\nu_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)\,\nu_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} = l_h(\Phi,v),
\end{gathered} \tag{3.3}$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ таковы, что

$$\Phi_h(x) \in U_h = \big\{\Phi_h(x) \in H_h^{(1)} = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) : g_0 \le \Phi_h(x) \le \overline{g}_0, \quad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi\big\}. \tag{3.4}$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1,2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{2h}(x)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, $\theta(x_2)$, $f_2(x)$, $u_0^{(1)}(x)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$a_{1h}^{(\alpha)}(x_1,x_2) = \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1 - 0.5h_1, r_2)\, dr_2, \qquad x \in \omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2, \quad \alpha = 1,2;$$

$$
\begin{gathered}
a_{2h}^{(\alpha)}(x_1,x_2)=\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \qquad x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+}, \quad \alpha=1,2;\\
a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_2}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr, \qquad x_2\in\omega_2^{+};\\
a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)=\tfrac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_2} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr, \qquad x_2\in\omega_2^{+};\\
d_{\alpha h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x\in\omega^{(\alpha)}, \quad \alpha=1,2;\\
d_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;\\
d_{2h}(\xi,x_2)=\tfrac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x_2\in\omega_2;\\
f_{2h}(x)=\frac{2}{h_1h_2}\iint\limits_{e^2(x)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(2)}, \qquad x_2\in\omega_2;\\
f_{2h}(\xi,x_2)=\tfrac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x_2\in\omega_2;\\
\theta_h(x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, \quad x_2\in\omega_2;\\
u_{0h}^{(1)}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \qquad x\in\overline{\omega}^{(1)}=\overline{\omega}_1^{(1)}\times\overline{\omega}_2.
\end{gathered}
\tag{3.5}
$$

**Т е о р е м а 3.1.** *Задача о нахождения решения разностной схемы (3.3) при любом фиксированном управлении $\Phi_h\in U_h$ эквивалентна решению операторного уравнения $A_h\,y=F_h$, где $A_h$ – разностный оператор, действующий из $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ в $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и сеточная функция $F\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ определяются равенствами $(A_h\,y,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=Q_h(y,\vartheta)$, $(F_h,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}}=l_h(\vartheta)$, $\forall y,\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$; задача (разностная схема) (3.3) однозначно разрешима для любого сеточного управления $\Phi_h\in U_h$, причем справедлива априорная оценка*

$$
\big\|y(x,\Phi_h)\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})}\le M\big(\|f_{2h}\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}+\|\Phi_h\|_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\big). \tag{3.6}
$$

**Т е о р е м а 3.2.** *Для каждого $h>0$ существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $\Phi_{h*}\in U_h$ в последовательности сеточных экстремальных задач (3.2) – (3.5), т.е. $J_*=\inf\big\{J(g):g\in U\big\}>-\infty$, $U_*=\big\{g_*\in U:J(g_*)=J_*\big\}\neq\emptyset$.*

## 4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (2.6) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x,\Phi_h)=\big(y_1(x,\Phi_h),y_2(x,\Phi_h)\big)$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.3) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где $U$ и $U_h$ – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) соответственно. Пусть $u(r;g) = \big(u_1(r;g), u_2(r;g)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ – решение прямой задачи (2.6), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x,\Phi_h) = \big(y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)\big) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (3.3), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x;g,\Phi_h) = \big(z_1(x;g,\Phi_h), z_2(x;g,\Phi_h)\big) = \big(y_1(x;\Phi_h) - u_1(x;g), y_2(x;\Phi_h) - u_2(x;g)\big)$ – погрешность метода по состоянию.

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

**Теорема 4.1.** *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r;g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.6)-(2.9) и (3.2)–(3.5). Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.6)-(2.9):*

$$\begin{aligned}
&\|z(x;g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \|y(x;\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \le \\
&\le C\Big\{|h|\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L\,q_\alpha\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\big)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\
&\quad + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big] + \|S^x f_1(x) - \Phi_h(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)}\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

## 5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.2) – (3.5) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и (3.2)–(3.5), для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, и любых $h > 0$.

Оценку погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.2)–(3.5) устанавливает следующая

**Теорема 5.1.** *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) соответственно и любых $h > 0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.2) – (3.5) справедлива оценка:*

$$\big|J(g) - J_h(\Phi_h)\big| = \big|I(u(r;g)) - I_h(y(x;\Phi_h))\big| \le M\big[|h| + \|S^x f_1(x) - \Phi_h(x)\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)}\big], \tag{5.1}$$

*где $M = Const > 0$, не зависящая от $h$, $y$, $u$, $\Phi_h$, $g$.*

Рассмотрим сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \omega^{(1)} \cup S_\xi = \omega^{(1)+} \times \omega_2$ и определим кусочно-постоянные восполнения на $\Omega_1$ сеточных управлений $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ по формуле

$$\hat{g}_h(r) = \widehat{P}_{1h}\Phi_h(r) = \Phi_h(x), \quad r \in \hat{e}^{(1)}(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi, \tag{5.2}$$

где $\hat{e}^{(1)}(x) \subset \overline{\Omega}_1$ – элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$:

$$\hat{e}^{(1)}(x_1,x_2)=e^{(1)}(x_1,x_2)=e_1^{(1)}(x_1)\times e_2^{(1)}(x_2),\quad x_1=2h_1,3h_1,\ldots,\xi-h_1,$$
$$x_2=2h_2,3h_2,\ldots,l_2-h_2;$$
$$\hat{e}(h_1,h_2)=\{0\le r_1\le 1.5h_1,\ 0\le r_2\le 1.5h_2\};$$
$$\hat{e}(h_1,x_2)=\{0\le r_1\le 1.5h_1,\ x_2-0.5h_2\le r_2\le x_2+0.5h_2\},\ x_2=2h_2,3h_2,\ldots,l_2-2h_2;$$
$$\hat{e}(h_1,l_2-h_2)=\{0\le r_1\le 1.5h_1,\ l_2-1.5h_2\le r_2\le l_2\};$$
$$\hat{e}(\xi,h_2)=\{\xi-0.5h_1\le r_1\le \xi,\ 0\le r_2\le 1.5h_2\};$$
$$\hat{e}(\xi,x_2)=\{\xi-0.5h_1\le r_1\le \xi,\ x_2-0.5h_2\le r_2\le x_2+0.5h_2\},\ x_2=2h_2,3h_2,\ldots,l_2-2h_2;$$
$$\hat{e}(\xi,l_2-h_2)=\{\xi-0.5h_1\le r_1\le \xi,\ l_2-1.5h_2\le r_2\le l_2\};$$
$$\hat{e}(x_1,l_2-h_2)=\{x_1-0.5h_1\le r_1\le x_1+0.5h_1,\ l_2-1.5h_2\le r_2\le l_2\},$$
$$x_1=2h_1,3h_1,\ldots,\xi-h_1;$$
$$\hat{e}(x_1,h_2)=\{x_1-0.5h_1\le r_1\le x_1+0.5h_1,\ 0\le r_2\le 1.5h_2\},\ x_1=2h_1,3h_1,\ldots,\xi-h_1. \tag{5.3}$$

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.6)-(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации $(3.2)-(3.5)$, зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to 0$. Для исследования связи между экстремальными задачами (2.6)-(2.9) и $(3.2)-(3.5)$ введем отображения:

$$R_{1h}:\ H^{(1)}=L_2(\Omega_1)\to H_h^{(1)}=L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi),\quad \widehat{P}_{1h}:\ H_h^{(1)}=L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)\to L_2(\Omega_1)=H^{(1)}, \tag{5.4}$$

которые определим следующим образом: $R_{1h}g=R_{1h}f_1=\Phi_h$, $\widehat{P}_{1h}\Phi_h=g$, где $\widehat{P}_{1h}\Phi_h(r)$ кусочно-постоянное восполнение на $\Omega_1$ сеточного управления $\Phi_h(x)$, $x\in\omega^{(1)}\cup S_\xi$, определяемое формулой $(5.2)$, а $R_{1h}g=R_{1h}f_1=S^xf_1(x)$, $x\in\omega^{(1)}\cup S_\xi$ – дискретизации на сетке $x\in\omega^{(1)}\cup S_\xi$ управления $g(r)\equiv f_1(r)=f_1(r_1,r_2)$, $r\in\Omega_1$, где $S^x=S^{x_1}S^{x_2}$ – оператор усреднения по Стеклову.

**Т е о р е м а 5.2.** *Пусть $J_*$ и $J_{h*}$ – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задач* (2.6)-(2.9) *и* $(3.2)-(3.5)$ *соответственно. Семейство сеточных задач* $(3.2)-(3.5)$, *зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}=\overline{\omega}^{(1,2)}\subset\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$ при $|h|\to 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.6)-(2.9) *по функционалу, т.е. $\lim J_{h*}=J_*$ при $|h|\to 0$, и справедлива оценка скорости сходимости*

$$\left|J_{h*}-J_*\right|\le M\,|h|. \tag{5.5}$$

Предположим теперь, что при каждом $h=(h_1,h_2)$ и соответствующей сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h=\overline{\omega}^{(1)}\cup\overline{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*}+\varepsilon_h$ нижней грани $J_{h*}$ функционала $J_h(\Phi_h)$ на $U_h$ в задаче $(3.2)-(3.5)$ и найдено сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$, дающее приближенное решение задачи $(3.2)-(3.5)$ в следующем смысле:

$$J_{h*}\le J_h(\Phi_{h\varepsilon_h})\le J_{h*}+\varepsilon_h,\quad \Phi_{h\varepsilon_h}\in U_h, \tag{5.6}$$

где последовательность $\varepsilon_h$ такова, что $\varepsilon_h\ge 0$ и $\varepsilon_h\to 0$ при $|h|\to 0$. Здесь последовательность $\varepsilon_h$ характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на $U_h$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x)\in U_h$ из (5.6) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.6)-(2.9).

**Т е о р е м а 5.3.** *Пусть последовательность сеточных управлений $\left\{\Phi_{h\varepsilon_h}\right\}\subset U_h$ определена из условий* (5.6). *Тогда последовательность управлений $\left\{\widehat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\right\}$, где*

$\widehat{P}_{1h}:\ H_h^{(1)} \to H^{(1)}$ *– отображение, определяемое из* (5.4)*, является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной задачи* (2.6)-(2.9)*, то есть* $\lim J(\widehat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(\widehat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_* \le C\,|h| + \varepsilon_h.$$

*Последовательность* $\left\{\widehat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\right\}$ *слабо в* $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ *сходится к множеству* $U_* \ne \emptyset$ *оптимальных управлений исходной экстремальной задачи* (2.6)-(2.9).

**Замечание 5.1.** *Из оценки* (5.5) *и неравенства* (5.6) *нетрудно получить, что* $\lim J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ *при* $|h| \to 0$*, причем справедлива оценка скорости сходимости*

$$\left|J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_*\right| \le M\,|h| + \varepsilon_h.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций $(3.2) - (3.5)$. В силу теоремы 2.2. задача $(3.2) - (3.5)$ корректно поставлена в слабой топологии пространства $H^{(1)}$. Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства $H^{(1)}$, то есть нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5.3.) будет сходящейся в норме $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ ко множеству $U_*$. Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации А.Н. Тихонова [14]. Рассмотрим один вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность получаемую на основе разностной аппроксимации, сильно сходящуюся к множеству «$\Omega$ -нормальных решений» задачи оптимального управления (2.6)-(2.9). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \qquad \left|\theta_{\delta_h}(\Phi_h)\right| \le \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h, \quad \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач $(3.2) - (3.5)$ введем на $U$ функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|^2_{H^{(1)}} = \|g\|^2_{L_2(\Omega_1)}$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|^2_{H_h^{(1)}} = \|\Phi_h\|^2_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на $U_h$ сеточный функционал Тихонова задачи $(3.2) - (3.5)$: $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h), \qquad \Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на $U_h$: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\widehat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h *} = \inf\left\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) :\ \Phi_h \in U_h\right\} \le T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h *} + \nu_h, \tag{5.7}$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество $\Omega$-нормальных решений задачи оптимального управления (2.6)-(2.9): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* :\ \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) :\ g_* \in U_*\}$.

**Теорема 5.4.** *Пусть последовательность сеточных управлений* $\left\{\widehat{\Phi}_h\right\}$ *определена из условий* (5.7)*. Тогда последовательность* $\left\{\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h(r)\right\}$*, где отображение* $\widehat{P}_{1h}$ :

*$H^{(1)} \to H^{(1)}$ определено в* (5.4)*, является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи* (2.6)-(2.9)*, то есть $\lim J(\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \to 0$ и справедлива оценка скорости сходимости:*

$$0 \le J(\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h) - J_* \le M\big(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h\big).$$

*Если, кроме того, последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ удовлетворяют условиям $\alpha_h$, $\delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \to 0$ при $|h| \to 0$, причем $\{\alpha_h\}$ стремится к нулю согласовано с величинами $|h|$, $\delta_h, \nu_h$ так, что $\big(|h| + \nu_h + \delta_h\big)/\alpha_h \to 0$ при $|h| \to 0$, то последовательность $\{\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h\}$ сильно в $H^{(1)}$ сходится к множеству $\Omega$-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений $U_{**}$ задачи* (2.6)-(2.9)*, то есть*

$$\lim \rho\big(\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h; U_{**}\big) = \lim \inf\big\{\|\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h - g_{**}\|_{H^{(1)}} : \ g_{**} \in U_{**}\big\} = 0, \quad \text{при} |h| \to 0,$$
$$\lim \Omega\big(\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h\big) = \lim \Omega\big\|\widehat{P}_{1h}\widehat{\Phi}_h\big\|^2_{H^{(1)}} = \Omega_* = \inf \Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при } |h| \to 0.$$

**Замечание 5.2.** *Можно показать, что $\lim T_{h\delta_h\alpha_h *} = J_*$, $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \to 0$, причем справедливы оценки скорости сходимости:*

$$\big|T_{h\delta_h\alpha_h *} - J_*\big| \le M\,\big[\,|h| + \delta_h + \alpha_h\big], \qquad \big|T_{h\delta_h\alpha_h}(\widehat{\Phi}_h) - J_*\big| \le M\,\big[\,|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h\big].$$

**Замечание 5.3.** *Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации* $(3.2) - (3.5)$.

## Список литературы


1. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

2. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.

3. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31**:1 (1991), 17–30.

4. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БГУ, Уфа, 1999.

5. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.

6. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

7. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области”, *Труды Средневолжского математического общества*, **11**:1 (2009), 133–144.

8. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Труды Средневолжского математического общества*, **13**:1 (2011), 32–44.

9. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

10. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

11. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.

12. Дренска Н. Т., “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московск. университета*, **15**:4, Вычислит. матем. и кибернетика (1981), 15–21.

13. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

14. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.


# Approximations of optimal controlling problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions

**© F.V. Lubyshev[4], M.E. Fairuzov[5], A.R. Manapova[6]**

**Abstract.** Method of difference approximation of optimal controlling problem for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solution is stated.

**Key Words:** optimal controlling problem, semilinear elliptic equations, difference method of solution, functional, regularization method.


[4] Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

[5] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

[6] Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.