УДК 512.917+513.9

Непрерывная зависимость чисел вращения для модельных семейств кусочно-непрерывных одномерных отображений

© М.И. Малкин[1]

Аннотация. Рассматриваются кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные отображения вещественной прямой, моделирующие динамику некоторых нейронных и телекоммуникационных сетей. Для отображений из рассматриваемых классов неблуждающее множество представляет собой несвязную сумму неблуждающих множеств двух отображений лоренцевского типа. Тем самым можно определить множество вращения изучаемого отображения. Доказано, что множество вращения есть объединение двух замкнутых интервалов, граничные точки которых непрерывно зависят от отображения (с хаусдорфовой топологией).

Ключевые слова: Числа вращения, отображения лоренцевского типа, множества вращения

1. Введение

Число вращения было введено А.Пуанкаре для сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. Оно измеряет асимптотическую фазовую скорость траектории, причём для всех траекторий гомеоморфизма это число одно и то же. Потоки на торе без состояний равновесия можно классифицировать при помощи числа вращения отображения последования (отображения Пуанкаре) на секущей. У более сложных систем (например, систем с аттрактором Лоренца) разные траектории могут давать разные асимптотические скорости. Оказалось, что для некоторых классов сложных систем можно ввести множество вращения - набор чисел вращения индивидуальных траекторий, причем множество вращения представляет собой замкнутый (возможно тривиальный) интервал - интервал вращения. Интервал вращения отражает степень разнообразия асимптотического поведения периодических орбит и является важной характеристикой, отражающей степень хаотичности системы. В частности, для эндоморфизмов окружности степени 1 вид интервала вращения и его величина в достаточной степени характеризуют динамические свойства эндоморфизма: из нетривиальности интервала вращения следует положительнрсть топологической энтропии (а следовательно, хаос по Ли-Йорку) и наличие периодических орбит всех периодов, кроме, возможно, конечного числа (см. [14]). Изменение интервала вращения в однопараметрических семействах эндоморфизмов связано с важными бифуркационными свойствами ([3], [19], [18]). Подобные свойства имеют место и для одномерных отображений лоренцевского типа и унимодальных отображений (см.[1], [2], [6], [12], [13]). Более того, с помощью этого инварианта удалось установить некоторые эффекты, связанные с хаотическим поведением орбит (например, C^r-структурную неустойчивость отображений, у которых концевые точки интервала вращения – иррациональные числа, см. [6], [13]).

Кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные отображения прямой находят применение в качестве моделей, демонстрирующих различные типы динамического поведения, интересные сценарии перехода от порядка к хаосу и соответствующие бифуркации. Отметим в этой связи модель импульсного осциллятора, модель нейронов с циклической подкачкой

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, malkin@mm.unn.ru

[16], модель биологического осциллятора [8], модели телекоммуникационных и нейронных сетей [5], [7], [11], математические модели в экономике, используемые при изучении ценовой динамики [17]. Часто встречающиеся кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные модели имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq -1 \\ f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ g_2(x), & x \geq 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $g_1(x), g_2(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие, непрерывные функции (ветви), заданные на интервалах $(-\infty, -1), (-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ соответственно и $f(0) = 0$ (без ограничения общности здесь приняты значения абсцисс точек разрыва ± 1, т.к. к этим значениям легко перейти при замене координат). В частности, в экономических моделях иногда используется семейство вида (1.1) для функций $f_1(x) = f_2(x) = Ax + e^{Bx} - 1$, $g(x) = Cx + e^{Dx} - 1$, где A, B, C, D — положительные параметры (обычно, меньшие единицы).

Для отображений (1.1) естественно предполагать, что выполняются условия

$$g_2(1) < 1 < f(1), \quad f(-1) < -1 < g_1(-1), \tag{1.2}$$

так как в противном случае динамика отображения на всей числовой прямой или на одной из полуосей тривиальна. Легко видеть, что при выполнении неравенств (1.2) имеются два инвариантных интервала, а именно $I_1 = [f(-1), g_1(-1)]$ и $I_2 = [g_2(1), f(1)]$, а траектории, начинающиеся вне этих интервалов, либо через конечное число итераций попадают в эти интервалы, либо стремятся к неподвижным точкам, либо уходят на бесконечность (при выполнении лишь одного из двойных неравенств (1.2) имеется один инвариантный интервал, а траектории, начинающиеся вне этого интервала через конечное число итераций попадают в него или стремятся к неподвижным точкам или уходят на бесконечность). Ограничение отображения (1.1) на каждом из интервалов I_1 и I_2 представляет собой отображение лоренцевского типа, т.е. разрывное отображение отрезка с одной точкой разрыва и двумя промежутками монотонного возрастания. Таким образом, неблуждающее множество отображения вида (1.1) представляет собой несвязную сумму неблуждающих множеств двух отображений лоренцевского типа и, возможно, некоторое множество неподвижных точек.

Рассматривая для каждого из указанных отображений лоренцевского типа множество вращения, которое на самом деле можно назвать интервалом вращения (см. [12]), мы можем определить множество вращения отображения (1.1) как набор из этих двух интервалов вращения. Основной результат данной статьи заключается в том, что интервалы вращения отображения (1.1) изменяются непрерывно при непрерывном изменении функций g_1, f, g_2 (в C^0-топологии, или, что эквивалентно, в хаусдорфовой топологии отображений (1.1)). Тем самым, в модельных семействах получает объяснение ситуация структурной неустойчивости, когда концевая точка (хотя бы одного из) интервалов вращения принимает иррациональное значение.

2. Непрерывность интервалов вращения лоренцевского типа

Рассмотрим множество отображений $f : I \to I$ интервала $I = [0, 1]$, имеющих одну точку разрыва $c = c(f)$ и удовлетворяющих условиям

1. f непрерывно и монотонно возрастает на интервалах $[0, c)$ и $(c, 1]$,
2. $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = 0, \lim\limits_{x \to c-} f(x) = 1.$

Обозначим множество отображений лоренцевского типа через F_L. Легко видеть, что для отображений, удовлетворяющих лишь первому условию, ограничение на интервал $J = [f(c+0), f(c-0)]$ есть отображение лоренцевского типа (с точностью до линейной замены координат, переводящей $f(c+0)$ в 0 и $f(c-0)$ в 1), причём любая точка вне J (за исключением, возможно, точек 0 и 1, если они неподвижны) за конечное число итераций попадает в J (поэтому второе условие используется лишь для удобства, а интервал J обычно называют истинным интервалом отображения, не удовлетворяющего второму условию). Обозначим через $\varphi : F \to F_L$ оператор проектирования, действие которого сводится к ограничению $f \in F$ на истинный интервал с последующей линейной заменой координат. Таким образом, переходя от f к $\varphi(f)$, можем считать, что условие 2 выполнено. Заметим, что $f(0) \leqslant f(1)$.

Символическая модель отображения $f \in F$ строится следующим образом. Любой точке $x \in I \backslash D$ (где D — множество прообразов точки разрыва c под действием всех итераций) ставится в соответствие нидинг последовательность без знака $U(x) = (U_n(x))_{n=0}^{\infty}$ из символов -1 и 1, где

$$U_n(x) = \begin{cases} -1, & f^n(x) \in [0, c) \\ 1, & f^n(x) \in (c, 1]. \end{cases}$$

Получаем отображение U из $I \backslash D$ в одностороннюю схему Бернулли Ω_2^+ из двух символов $+1$, -1 (с лексикографическим порядком). Очевидно, что отображение U сохраняет порядок. Под символической моделью отображения понимается $\sigma_+|\Sigma_f^+$, где Σ_f^+ есть замыкание $U(I \backslash D)$ в Ω_2^+, и σ_+ - односторонний сдвиг. Пара последовательностей

$$K_f^+ = \lim_{x \to c+} U(x), K_f^- = \lim_{x \to c-} U(x)$$

называется нидинг-инвариантами лоренцевого отображения f.

Отображение $f \in F_L$ можно считать отображением окружности S^1, если отождествить концы интервала I.Тогда отождествлённая точка становится точкой разрыва, а c — точкой непрерывности. Обозначим это отображение окружности через F. Для F, как и для непрерывных отображений окружности, можно определить поднятие, т.е. такое отображение $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которого $F\pi = \pi\bar{f}$, где $\pi : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/Z$ - каноническая проекция. Для данного $f \in F_L$ зафиксируем поднятие $\bar{f}$ вида

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} [x] + f(\{x\}), & \{x\} \in [0, c) \\ f(\{x\}) + [x] + 1, & \{x\} \in [c, 1). \end{cases}$$

где $[x]$, $\{x\}$ соответственно целая и дробная части числа x (таким образом, предполагаем, что $\bar{f}$ принимает значения в целых точках по непрерывности справа).

Для отображения окружности F с поднятием $\bar{f}$ можно ввести множество вращения $\rho(\bar{f})$ следующим образом:

$$\rho(\bar{f}, x) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\bar{f}^n(x) - x}{n}, x \in I,$$

$$\rho(\bar{f}) = \{\rho(\bar{f}, x) : x \in I\}.$$

С другой стороны, можно определить множество вращения $\rho(\sigma_+, \Sigma_f^+)$ символической модели $\sigma_+|\Sigma_f^+$ так

$$\rho(\sigma_+, \omega) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\{+1\}}(\omega_i),$$

$$\rho(\sigma_+|\Sigma_f^+) = \{\rho(\sigma_+, \omega) : \omega \in \Sigma_f^+\},$$

где χ - характеристическая функция. Нетрудно видеть, что фактически эти определения эквивалентны.

В силу того, что искать множество вращения по приведённым определениям не всегда удобно, введём следующую конструкцию. Для данного поднятия $\bar{f}$ и целого k рассмотрим значения $u_0^{(k)} = \bar{f}(k+0) = \bar{f}(k)$ и $u_1^{(k)} = \bar{f}(k-0)$. Тогда $u_0^{(k)} \le u^{(k)} < u_0^{(k)} + 1$ и $u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + 1, u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} + 1$. Если $u_0^{(k)} = u_1^{(k)}$, то $\bar{f}$ есть поднятие гомеоморфизма окружности, и тогда в силу условия плотности множества D, f есть транзитивный гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения. Пусть теперь интервал $[u_0^{(k)}, u_1^{(k)}]$-нетривиальный, и u принадлежит этому интервалу.Тогда можно однозначно определить точки $a(u) \le k, b(u) \ge k$ такие, что $f(a(u)) = f(b(u)) = u$. Для любого τ, $0 \le \tau \le 1$, определим интервалы $J_\tau^{(k)}, k \in Z$, следующим образом:

$$J_\tau^{(k)} = [a_\tau^{(k)}, b_\tau^{(k)}] = [a(u), b(u)],$$

где $u = u_0^{(k)} + \tau(u_1^{(k)} - u_0^{(k)})$. Построим теперь отображение $f_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида

$$\bar{f}_\tau(x) = \begin{cases} \bar{f}(x), & x \notin J_\tau^{(k)} \\ u_0^{(k)} + \tau(u_1^{(k)} - u_0^{(k)}), & x \in J_\tau^{(k)}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\bar{f}_\tau$ при любом τ, $0 \le \tau \le 1$, представляет собой непрерывную неубывающую функцию на $\mathbb{R}$ с интервалами постоянства $J_\tau^{(k)}$, и выполняется $\bar{f}_\tau(x+1) = \bar{f}_\tau(x) + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\bar{f}_\tau$ есть поднятие для непрерывного отображения окружности $f_\tau : S^1 \to S^1$ степени 1.

Для необратимых лоренцевых отображений (отображений с перекрытием) непрерывность интервалов вращения доказана в [12]. Для лоренцевых отображений f, у которых значения в концевых точках совпадают (т.е. $f(0) = f(1)$) результат о непрерывности числа вращения следует из классических результатов о числе вращения Пуанкаре для гомеоморфизмов окружности степени 1. Поэтому для того, чтобы доказать основной результат данной работы, требуется рассмотреть обратимые лоренцевы отображения, т.е. отображения f, для которых $f(0) > f(1)$. Обозначим через Υ_- семейство поднятий $\bar{f}$ лоренцевых обратимых отображений, т.е. отображений $f : [0,1] \to [0,1]$, для которых выполняется $f(0) > f(1)$. В работе [10] доказано, что для таких отображений существует число вращения $\rho(\bar{f}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\bar{f}^{(n)}(x)-x}{n}$, не зависещее от начальной точки x, и (так же, как для гомеоморфизмов окружности степени 1) оно единственно и при изменении поднятия $\bar{f}' = \bar{f} + m$ меняется на целое число : $\rho(\bar{f}') = \rho(\bar{f}) + m.$

Таким образом, можно говорить о числе вращения самого лоренцевого отображения f. Из определения числа вращения вытекают следующие свойства :

1) $\rho(\bar{f}^m + k) = m\rho(\bar{f}) + k$,

2) Если $\bar{f} \le \bar{g}$ (где $\bar{f}, \bar{g}$ - поднятия лоренцевых обратимых отображений f, g), то $\rho(\bar{f}) \le \rho(\bar{g})$.

Действительно, второе свойство очевидно, а первое следует из неравенств: $\rho(\bar{f}^m + k) = \rho(\bar{f}^m) + k = k + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\bar{f}^{(mn)}(x)-x}{n} = k + \lim\limits_{mn\to\infty} \frac{\bar{f}^{(mn)}(x)-x}{mn} m = k + \lim\limits_{l\to\infty} \frac{\bar{f}^{(l)}(x)-x}{l} m = m\rho(\bar{f}) + k$

Теперь мы готовы установить основной результат данной работы, для этого осталось доказать следующий факт.

Т е о р е м а 2.1. *Число вращения $\rho(\bar f)$ непрерывно зависит от $\bar f \in \Upsilon_-$, где множество Υ_- рассматривается в C^0 топологии:*

$$d(\bar f, \bar g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar f - \bar g| = \sup_{x \in [0,1]} |\bar f - \bar g|$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar f \in \Upsilon_-$ — поднятие данного лоренцевого отображения f. Для произвольного ε возьмём рациональные числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ такие, что $\frac{p_1}{q_1} < \rho(\bar f) < \frac{p_2}{q_2}$ и $\rho(\bar f) - \frac{p_1}{q_1} < \varepsilon, \frac{p_2}{q_2} - \rho(\bar f) < \varepsilon$. Тогда функция $F(x) = \bar f^{q_1}(x) - p_1$ положительна при всех $x \in \mathbb{R}$ и поэтому $\rho(F) > 0$. Для поднятий $\bar g$, достаточно близких к $\bar f$ будет выполняться $G(x) = \bar g^{q_1}(x) - p_1 > 0$ (так как $F(x) \geq \delta$ для некоторого достаточно малого $\delta > 0$). Значит $\rho(G) > 0$. Переходя к исходным поднятиям f, g, в силу свойства 1, получим $\rho(\bar g) > \frac{p_1}{q_1}$. Аналогично получим неравенство $\rho(g) < \frac{p_2}{q_2}$, если рассмотрим поднятия $\bar f^{q_2} - p_2$ и $\bar g^{q_2} - p_2$. В результате будем иметь $|\rho(g) - \rho(f)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м и 11.G34.31.00390

Список литературы

1. Alseda L., Llibre J., “Kneading theory of Lorenz maps”, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, **23** (1989), 83–89.

2. Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M. Tresser C., “Periods and entropy for Lorenz-like maps”, *Ann. Inst. Fourier*, **39** (1989), 929–952.

3. Bamon R., Malta I., Pacifico M. J., “Changing rotation intervals of endomorphisms of the circle”, *Invent. math.*, **83** (1986), 257–264.

4. Bamon R., Malta I., Pacifico M. J., Takens F., “Rotation intervals of endomorphisms of the circle”, *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **4** (1984), 493–498.

5. Banerjee S., Kartnik M. S., Yuan G., Yorke J. A., “Bifurcations in One-Dimensional Piecewise Smooth Maps”, *Theory and Applications in Switching Circuits. IEEE Trans Circuits Systems.*, **47** (2000), 389–394.

6. Gambaudo J. M., Tresser C., “A monotonicity property in one dimensional dynamics Contemporary Math.”, **135** (1992), 213–222.

7. Zhusubaliev Z. T., Mosekilde E., *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, World Scientific Press, Singapur, 2003.

8. Glass L., Mackey M. C., “A simple model for phase locking of biological oscillators”, *J. Math. Biol.*, **7** (1979), 339–352.

9. Ito R., “Rotation sets are closed”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **86** (1981), 321–327.

10. Keener J. P., “Chaotic Behavior in Piecewise Continuous Difference Equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (2000), 589–604..

11. Maistrenko Y. L., Maistrenko V. L., Chua L. O., “Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua’s circuit”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **3** (1993), 1557–1572.

12. Malkin M. I., "Rotation Intervals and the Dynamics of Lorenz Type Mappings", *Selecta Mathematica Sovietica*, **10** (1991), 265–275.

13. Li M.-C., Malkin M., "Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps", *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

14. Малкин М. И., "Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности", *Украинский мат. журнал*, **35** (1983), 327–332.

15. Newhouse S., Palis J., Takens F., "Bifurcation and stability of families ofdiffeomorphisms", *Publ. I.H.E.S.*, **57** (1983), 5–71.

16. Rescigno A., Stein R. B., Purple R. L., Poppele R. E., "A neuronal model for the discharge patterns produced by ciclic inputs", *Bull. Math. Biophys*, **32** (1970), 337–353.

17. Tramontana F., Westerholff F., Gardini L., "On the complicated price dynamics of a simple one-dimensional discontinuous financial market model with heterogeneous interacting traders", *J. Econ. Behav. Organ.*, **74** (2010), 187–205.

18. Saum M. A., Young T. R., "Observed rotation numbers in families of circle maps", *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **11** (2001), 73–89.

19. Young T. R., "Entropy and rotation intervals for circle maps near saddle-node bifurcations", *Math. Z.*, **234** (2000), 487–506.

Continuous dependence of rotation numbers for model family of piecewise continuous one-dimensional maps

© **M.I. Malkin**[2]

Abstract. We consider a piecewise monotonic, piecewise continuous maps the real line, simulating the dynamics of some neural and telecommunications networks. For maps of the classes nonwandering set is the disjoint union of the sets of nonwandering two maps of Lorenz type. Thus, we can define the rotation rotation of the studied maps. It is proved that there are a lot of rotation the union of two closed intervals, the boundary points are continuously depend on the maps (with the Hausdorff topology).

Key Words: rotation numbers, maps of Lorentz type, rotation set

[2] Associate Professor of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@mm.unn.ru.