УДК 517.938

Нелинейная управляемая математическая модель экономической системы: генеральная компания - совместное предприятие

© Е. С. Дюба[1]

Аннотация. Построена математическая модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие, которая описывается системой дифференциальных уравнений. Определены условия существования вектора управления u, доставляющего максимальное значение функционалу управления $\pi(x, u)$.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, доля рынка, прибыль, управляемость, функционал, экстремум.

1. Введение

В настоящей статье рассматривается математическая модель развития экономической системы: генеральная компания – совместное предприятие. Совместным предприятием является компания, работающая под маркой генеральной компании. Данная модель развития является выгодной формой ведения бизнеса. Ею пользуются во многих странах с развитой рыночной экономикой. Не так давно подобные предприятия появились и в России, и их количество растет с каждым годом. Эта система ведения бизнеса позволяет генеральной фирме расти быстрее и с меньшими капитальными затратами, чем при традиционном способе организации предприятий. В то же время предприниматель, присоединившийся к такой системе, снижает свой риск, так как покупает уже готовый бизнес, занявший определенную нишу, технологии которого были всесторонне опробованы на практике.

Подобную систему рассматривали в своей работе Рудашевский В.Д. и Фурщик М.А.[1].

Рассмотрим математическую модель развития экономической системы, состоящую из генеральной компании и n-1 совместного предприятия. Предположим, что финансовый рынок может быть разделен между совместными предприятиями и генеральной компанией в любой пропорции. Пусть x_1 - доля рынка, занятая генеральной компанией, x_i $i \in \{2, n\}$ - доля рынка, занятая i-ым совместным предприятием.

Символом $\dot{x}_1$ будем обозначать темп изменения доли финансового рынка генеральной компании. Он зависит от занимаемой доли рынка самой генеральной компании и всех её совместных предприятий в момент времени t. Также будут оказывать влияние управляющие воздействия, то есть вложения в рекламу и развитие качества товаров или услуг. Для успешного развития своей марки генеральной компании приходится поддерживать совместные предприятия. Она выделяет либо часть своих средств, либо часть средств других совместных предприятий, либо оказывает поддержку в виде дополнительных управляющих воздействий.

Таким образом, темп изменения доли финансового рынка генеральной компании определится равенством $\dot{x}_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}(t)x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{1j}(t)u_i + \bar{f}_1(t, x, u)$, где $u = (u_1, ..., u_m)$ - вектор-управление, $\bar{f}_1(t, x, u)$ включает все нелинейные слагаемые.

[1]Аспирант кафедры математики и МПМД, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; dyuba-lisa@rambler.ru.

Изменение доли финансового рынка, занимаемого первым совместным предприятием, $\dot{x}_2$ зависит от долей рынка, которые занимают генеральная компания и остальные совместные предприятия, от выбранных этой компанией управленческих действий (вложение средств в исследование рынка, оптимальная организация работы компании). Если этой компании необходима поддержка, её может оказать генеральная компания из своих средств или из средств одного или нескольких совместных предприятий, либо в виде организации дополнительных управляющих воздействий.

Темп изменения доли финансового рынка первого совместного предприятия определится равенством $\dot{x}_2(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i}(t)x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{2j}(t)u_i + \bar{f}_2(t,x,u)$. Для второго совместного предприятия аналогично получим $\dot{x}_3(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{3i}(t)x_i + \sum_{j=1}^{m} b_{3j}(t)u_i + \bar{f}_3(t,x,u)$.

В общем случае получим систему дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \bar{f}(t,x,u), \tag{1.1}$$

где $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ - доли рынка, занятые генеральной компанией и n-1 совместным предприятием, $\dot{x}_i$, $i \in \{1, n\}$ - темп изменения каждой из этих величин при $t \in [0, T]$, T - некоторое положительное число, $u = (u_1, ..., u_m)$ – вектор-управление. $A(t)$ – $n \times n$-матрица, $B(t)$ – $n \times m$-матрица, коэффициенты которой учитывают вложения в управляющие воздействия. Вектор-функция $\bar{f}(t,x,u)$ имеет порядок выше первого по $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ одновременно и учитывает влияние нелинейных членов на темп изменения величин $x_i(t)$.

Цель исследования состоит в том, чтобы найти управление экономической системы, при котором генеральная компания получит наибольшую прибыль за исследуемый период времени.

Прибыль генеральной компании за время $t \in [0, T]$ определится функционалом $\pi(x,u) = \int_0^T \Phi(t,x,u)dt$, где $\Phi(t,x,u)$ - некоторая нелинейная функция, в которой учитываются доход от деятельности генеральной компании и совместных предприятий, приносимый вложениями в управляющие воздействия, расходы на инвестиции в развитие сети.

2. Постановка задачи

Предположим, что $x = x(t, \alpha, u_0)$, $x(0, \alpha, u_0) = \alpha$ известное решение системы (1.1), при фиксированном α, определённое на сегменте $[0, T]$, $\alpha \in E_n$, $u_0 \in E_m$. Обозначим его $x = x(t, u_0)$.

Ставится задача найти управление u, при котором решение системы (1.1), определённое на сегменте $[0, T]$, приносит генеральной компании максимальную прибыль, т.е. доставляет максимум функционалу $\pi(x,u)$.

3. Определение условий, доставляющих максимальную прибыль генеральной компании

Заменой переменных $y = x - x(t, u_0)$, $v = u - u_0$ система (1.1) сведется к системе

$$\dot{y} = A(t)y + B(t)v + f(t,y,v), \tag{3.1}$$

где $f(t,y,v) = \bar{f}(t, y + x(t,u_0), v + u_0) - \bar{f}(t,x,u)$.

Функционал $\pi(x,u)$ в новых переменных определится равенством $\pi(y,v) = \int_0^T \Phi(t, y + x(t,u_0), v + u_0)dt$.

Введём следующие обозначения: $D(\delta_0) = \{(t,y,v) : t \in [0,T], y \in E_n, |y| \leq \delta_0$, $v \in E_m, |v| \leq |\delta_0|\}$, $C(\delta_0) = \{c : c \in E_n, |c| \leq \delta_0\}$, $V(\delta_0) = \{v : v \in E_m, |v| \leq \delta_0\}$, $\delta_0 < 0$ – некоторое число, $z = (y,v)$, $|z| = \max\{|y|, |v|\}$, $\gamma = (c,v)$, $|\gamma| = \max\{|c|, |v|\}$.

Будем предполагать, что на множестве $D(\delta_0)$ матрицы $A(t)$, $B(t)$ и вектор–функция $f(t,y,v)$ определены, непрерывны, $|f(t,y_1,v)-f(t,y_2,v)|\le L\,|y_1-y_2|$, $L>0$ - некоторое число, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(t,y,v)}{|z|}=0$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Непосредственно подстановкой убеждаемся, что $y=0$ является решением системы (3.1) при $v=0$. Тогда существует $\delta\in(0,\delta_0]$ такое, что при любых $c\in C(\delta)$ и $v\in V(\delta)$ система (3.1) имеет решение $y=\bar y(t,c,v)$, $\bar y(0,c,0)=c$, определённое на сегменте $[0,T]$, непрерывное на множестве $[0,T]\times C(\delta)\times V(\delta)$ и удовлетворяющее на этом множестве неравенству $|\bar y(t,c,v)|\le\delta_0$.

Одновременно с системой (3.1) рассмотрим систему

$$\dot y = A(t)y+B(t)v+f(t,\overline{y}(t,c,v),v). \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Решение $y=\bar y(t,c,v)$ системы (3.1) является решением системы (3.2), а решение $y(t)=X(t)c+R(t)v+P(t,\overline{y}(t,c,v),v)$, где $X(t)$ - фундаментальная матрица системы $\dot y=A(t)y$, $X(0)=E$, $R(t)=X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$, $P(t,\overline{y}(t,c,v),v)=X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau,\overline{y}(\tau,c,v),v)d\tau$, системы (3.2) является решением системы (3.1) и справедливо равенство $y(t)=\bar y(t,c,v)$ при любом $t\in[0,T]$.*

Доказательство. Тот факт, что решение $y=\bar y(t,c,v)$ системы (3.1) является решением системы (3.2), проверяется непосредственной подстановкой $\bar y(t,c,v)$ в равенство (3.2).

Решением системы (3.2) является и вектор-функция $y(t)=X(t)c+R(t)v+$ $+P(t,\overline{y}(t,c,v),v)$, принимающая значение c при $t=0$ и $v=0$.

Таким образом, система (3.2) имеет два решения с одинаковыми начальными данными. По теореме существования и единственности решений линейных систем дифференциальных уравнений получим, что при любом $t\in[0,T]$ $\overline{y}(t,c,v)=X(t)c+R(t)v+P(t,\overline{y}(t,c,v),v)$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Решение $\bar y(t,c,v)$ системы (3.1) представимо в виде $\bar y(t,c,v)=X(t)c+R(t)v+o(|\gamma|)$.*

Доказательство. Из того, что $\bar y(t,c,v)=c+\int_0^t(A(\tau)\bar y(\tau,c,v)+B(\tau)v+$ $+f(\tau,\bar y(\tau,c,v),v))dt$, следует, что $|\bar y(t,c,v)|\le|c|+\|B(\cdot)\|\,|v|\,T+(\|A(\cdot)\|+L)\,|\bar y(\tau,c,v)|$, $\|A(\cdot)\|$, $\|B(\cdot)\|$ – нормы соответственно матриц $A(t)$ и $B(t)$. Тогда по лемме Гроноулла–Беллмана [2] $|\bar y(t,c,v)|\le(|c|+\|B(\cdot)\|\,|v|\,T)\exp(\|A(\cdot)\|+L)T$. Поэтому $\lim\limits_{\gamma\to 0}\bar y(t,c,v)=0$, а следовательно, учитывая, что $z(t,c,v)=(y(t,c,v),v)$, и $\lim\limits_{\gamma\to 0}z(t,c,v)=0$ равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Так как $|z(t,c,v)|\le|\bar y(t,c,v)|+|c|$, $\frac{|\bar y(t,c,v)|}{|\gamma|}\le(1+\|B(\cdot)\|\,T)\exp(\|A(\cdot)\|+L)T$ на множестве $[0,T]\times C(\delta)\times V(\delta)$, то на этом множестве величина $\frac{|z(t,c,v)|}{|\gamma|}$ ограничена.

По предположению $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(t,y,v)}{|z|}=0$ равномерно по $t\in[0,T]$. Поэтому $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{f(t,\bar y(t,c,v),v)}{|\gamma|}=$ $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{|f(t,\bar y(t,c,v),v)|}{|z(t,c,v)|}\cdot\frac{|z(t,c,v)|}{|\gamma|}=0$ равномерно относительно $t\in[0,T]$. Отсюда в силу ограниченности матриц $X(t)$, $X^{-1}(t)$ на сегменте $[0,T]$ получим $P(t,\overline{y}(t,c,v),v)=o(|\gamma|)$, а $\bar y(t,c,v)=X(t)c+R(t)v+o(|\gamma|)$ на множестве $[0,T]\times C(\delta)\times V(\delta)$.

Теорема доказана.

Предположим, что в окрестности точки $(c,v)=(0,0)$ функционал имеет вид $\pi(y,v)=$ $\bar\Phi(u_0)+\bar D(u_0)\gamma+\bar Q_l(u_0,\gamma)+o(|\gamma|^l)$, где $\bar\Phi(u_0)=\int_0^T\Phi(t,\,x(t,u_0),u_0)dt$, $\bar D(u_0)$ – известная матрица, $\bar Q_l(u_0,\gamma)$ – вектор-форма порядка l, $l\ge 2$, относительно координат вектора γ.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 3.3. *Необходимым условием существования точки экстремума функционала $\pi(x,u)$ является выполнение равенства $\bar{D}(u_0)=0$.*

Теорема 3.4. *Пусть вектор u_0 таков, что $\bar{D}_1(u_0)=0$. Тогда:*

1. *если форма $\bar{Q}_l(u_0,\gamma)$ знакоопределенная, то на решении $x=x(t,u_0)$ системы (1.1) функционал $\pi(x,u)$ имеет экстремум, минимум при $\bar{Q}_l(u_0,\gamma)>0$, максимум при $\bar{Q}_l(u_0,\gamma)<0$.*

2. *если форма $\bar{Q}_l(u_0,\gamma)$ знакопеременная, то функционал $\pi(x,u)$ на решении $x=x(t,u_0)$ системы (1.1) экстремума не имеет.*

Таким образом, теоремы 3.3 и 3.4 определяют условия существования вектора u_0, при котором функционал $\pi(x,u)$ имеет максимум на решении $x=x(t,u_0)$ и, следовательно, определяют существование стартового состояния системы «генеральная компания – совместное предприятие» и её управление, при которых генеральная компания получает наибольшую прибыль.

4. Пример

Пусть в системе (1.1) x_1 - доля рынка, занятая генеральной компанией, x_2– доля рынка, занятая совместным предприятием. Предположим, что изменение доли рынка генеральной компании зависит лишь от доли рынка, занимаемой ей в момент времени t с коэффициентом 0,6, а для совместного предприятия с коэффициентом 0,3. Генеральная компания несет расходы на управляющие воздействия, равные -0,6. Таким образом, в системе (1.1) $A=(colon(0,6;0),colon(0;0,3))$, $B=(colon(-0,6;0))$. Нелинейные слагаемые опишутся вектором $\bar{f}(t,x,u)=(colon(-x_1^2-1,5x_1x_2+0,3x_1u+1,5x_2u+0,7u^2+2,5x_1^2x_2-0,5x_1^2u-2,5x_2u^2+0,5u^3),\ (-0,5x_1x_2-0,75x_2^2-0,35x_2u-0,25x_1x_2u+1,25x_1x_2^2+1,25x_2^2u-0,25x_2u^2))$. Исследуем эту модель за время $t\in[0,1]$. Функционал прибыли описывается равенством $\pi(x,u)=\int_0^1\Phi(x,u)dt$, в котором $\Phi(x,u)=0,4x_1u-0,16x_1^2-0,25u^2-0,15x_1x_2+0,2u$.

Решением системы дифференциальных уравнений является вектор-функция $x(u)=(colon(0,6-u),\ (0,4-0,2u))$. Определим условия существования управления u_0, при котором генеральная компания получит максимальную прибыль.

Заменой переменных $y=x-x(u_0)$, $v=u-u_0$ система (1.1) сведется к системе

$$\dot{y}=f(y,v), \tag{4.1}$$

в которой $f(y,v)$ – известная вектор-функция, второго и выше порядка. Таким образом, по теореме 3.2 решение системы (4.1) запишется так $y(t,c)=c+o(|\gamma|)$.

Функционал в новых переменных примет вид $\pi(y,v)=\bar{\Phi}(u_0)+\bar{D}(u_0)\gamma+\bar{Q}_2(u_0,\gamma)+o(|\gamma|^2)$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при $u_0=0,42$ $\bar{\Phi}(u_0)=0,056$, $\bar{D}(u_0)=0,71-1,68u_0=0$ и $\bar{Q}_2(u_0,\gamma)=-0,0936v^2$. Следовательно, выполнены условия теорем 3.3 и 3.4. Это значит, что в точке $u_0=0,42$ функционал принимает максимальное значение. Если расход генеральной компании на управление составит $u_0=0,5$, то её прибыль уменьшится и будет равна $\pi(x,u)=0,051$.

Таким образом, в точке $u_0=0,42$ функционал $\pi(x,u)$ имеет максимум, генеральная компания получит прибыль $\pi(x,u)=0,056$.

Список литературы

1. Рудашевский В.Д., Фурщик М.А. Проблемы предприятий. Оптимальная стратегия развития франчайзинговой системы. // Экономика и математические методы. - 1998. - Том 34. №2. - С. 89-104.

2. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 472 с.

Nonlinear control mathematical model of the economic system: general company - joint enterprice.

© E. S. Dyuba[2]

Abstract. A mathematical model of the economic system: the General Company - a joint enterprice, described by a system of differential equations has been made. The conditions for the existence of vector control u, delivering maximum significance to the functional management I have been defined.
Key Words: system of the differential equations, market share, profits, control, functional, extremum.

References

1. Rudashevsky V.D., Furschik M.A. Problems of enterprises. The optimal strategy for the development of a franchising system. // Economics and Mathematical Methods. - 1998. – V. 34. , №2. - P. 89-104.

2. Demidovich B.P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability – M.: Nauka, 1967. – 472 p.

[2]A post graduate student Char of Mathematics and MTMD, Ryazan State University after A.S. Esenin, Ryazan; dyuba-lisa@rambler.ru.