УДК 517.929

Новый метод построения минимального многочлена

© А. Ф. Зубова[1], М. В. Стрекопытова[2]

Аннотация. В статье представлен метод построения минимального многочлена, который позволяет находить коэффициенты этого многочлена в пределах точности представления чисел в компьютере и свободен от ошибок округления.

Ключевые слова: матрица, столбец, минимальный многочлен, вещественное число, линейная независимость, эквивалентность.

1. Введение

Зная коэффициенты минимального многочлена легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка.

Рассмотрим прямоугольную систему линейных алгебраических уравнений

$$AX = B, \tag{1.1}$$

где матрица A размера $n \times m$ $(m \leq n)$ и вектор B размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными [6].

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы A равен m, то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \to C^T C = X^T A^T A X = \|C\|^2 > 0 \to A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица A размера $n \times m$, $n \geq m$ имеет ранг равный m,

$$\dot{X} = -A^T A X + A^T B. \tag{1.2}$$

2. Исследование устойчивости матрицы системы первого приближения

Справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Положение равновесия системы* (1.2) *является решением системы* (1.1) *или ее псевдорешением.*

[1]Профессор факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

[2]Доцент факультета ПМ-ПУ, Санкт-Петербургский государственный университет, г.Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как матрица - $A^T A$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T AC + A^T B = 0 \quad \text{или} \quad C = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{2.1}$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (1.1) получено [5].

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор B в виде разложения по подпространствам, одно из которых L_1, является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы A, а второе L_2, является ортогональным дополнением первого, т.е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (2.1) примет вид:

$$-A^T AC + A^T (B_1 + B_2) = -A^T AC + A^T B_1 = 0$$

или

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{2.2}$$

Покажем, что найденная величина C, является псевдорешением уравнения (1.1), т.е. имеет место неравенство [4]

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|, \ X \neq C,$$

где $\| \, \|$ - евклидова норма. Это будет и означать, что квадратичное отклонение $\|AX - B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [1].

Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX, \quad U + V = B - AX,$$

тогда,

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2.$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т.е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A^{-1}) A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (1.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A) X_k + hA^T B, \tag{2.3}$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (1.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления точности чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки [3]

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|,$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|,\ k = 1, 2, \ldots$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (2.3) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Доказательство закончено.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (1.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (1.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большего порядка (Рунге-Кутта и т.д.) не является необходимым, т.к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

Список литературы

1. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, Н.И.Зубов. Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления. Монография. СПб.: Мобильность плюс, 2010, 319 с.

2. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, С.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем. Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2011. 362 с.

3. Н.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Автоматизация проектирования устойчивости и надежности колебательных систем. Учебное пособие. СПб.: Мобильность плюс, 2010. 355 с.

4. Н.В.Зубов, А.Ф.Зубова. Безопасность функционирования технических систем. Учебное пособие. СПб.: ВВМ, 2009, 343 с.

5. А.В.Зубов, Н.В.Зубов. Динамическая безопасность управляемых систем. Монография. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2009. 172 с.

6. А.В.Зубов, Н.В.Зубов. Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа. Учебное пособие. СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2010. 102 с.

The new method of building minimum polynom

© **A. F. Zubova[3], M. V. Strecopitova[4]**

Abstract. In this article is proposes the new method of building minimum polynom with help solving of systems linear algebraical equations, that is allows to find coefficients minimum polynom in limits accurate proposition numbers in computing and is frees from mistakes of roundedness.

Key Words: matrix, column, minimum polynom, material number, linear independent, equivalence.

[3]Professor of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

[4]Lecture of faculty of AM-PC, Saint-Petersburg State University, Saint-Petesburg; a_v_zubov@mail.ru