УДК 517.9

О некоторых классах решений уравнений газовой динамики

© П. А. Вельмисов[1], Ю. А. Казакова[2]

Аннотация. В статье рассматриваются решения типа «бегущая волна» [1] дифференциальных уравнений в газовой динамике. Предложена методика, позволяющая получить решения указанного типа без применения метода дифференциальных связей, требующего анализа совместности переопределенных систем [4-6]. В качестве примера построены решения простых и двойных волн.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, уравнения газовой динамики, бегущие волны, простые волны, двойные волны.

1. Общая схема построения решений типа «бегущая волна ранга r»

Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка:

$$L\left(x_1, x_2, ..., x_n, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \{H\}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - независимые переменные, $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ - искомая функция, $\{H\}$ - совокупность всевозможных частных производных второго порядка $\left(\text{при этом } \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_l} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_l \partial x_k}\right)$.

С помощью преобразования Ампера от функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ перейдем к функции $\omega(u_1, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = -\omega(u_1, u_2, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n) + \sum_{k=1}^{r} u_k x_k, \quad u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad x_i = \frac{\partial \omega}{\partial u_i}.$$

При построении решений типа «бегущая волна ранга r» функция ω представляется в виде:

$$\omega(u_1, u_2, ..., u_r, x_{r+1}, ..., x_n) = \omega_0(u_1, u_2, ..., u_r) + \sum_{k=1}^{n-r} \omega_{r+k}(u_1, u_2, ..., u_r) x_{r+k};$$

$$x_i = \frac{\partial \omega_0}{\partial u_i} + \sum_{k=1}^{n-r} \frac{\partial \omega_{r+k}}{\partial u_i} x_{r+k}, \quad i = 1 \div r, \quad r = 1 \div n.$$

В частности, для построения решения простой волны ($r = 1$) следует перейти от функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ к функции $\omega(u, x_2, ..., x_n)$

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = -\omega(u, x_2, ..., x_n) + x_1 u, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad x_1 = \frac{\partial \omega}{\partial u}.$$

[1]Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[2]Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; kazakovaua@mail.ru.

Тогда частные производные функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ пересчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = -\omega_{x_k},\ k = 2 \div n;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} = \frac{1}{\omega_{uu}};\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_1} = -\frac{\omega_{x_k u}}{\omega_{uu}},\ k = 2 \div n, \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_m} = \frac{\omega_{x_k x_m}\omega_{uu} - \omega_{u x_k}\omega_{u x_m}}{\omega_{uu}},\ k, m = 2 \div n;\ \omega_{uu} \neq 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где нижние индексы у функции $\omega(u, x_2, ..., x_n)$ обозначают производные. Подставив (1.2) в уравнение (1.1), получим дифференциальное уравнение для функции $\omega(u, x_2, ..., x_n)$. Чтобы получить решение простой волны, функцию $\omega(u, x_2, ..., x_n)$ следует искать в виде:

$$\omega(u, x_2, ..., x_n) = \omega_0(u) + \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{k+1}(u) x_{k+1},\quad x_1 = \frac{\partial\omega_0}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial\omega_{k+1}}{\partial u} x_{k+1}.$$

Для построения решения двойной волны ($r = 2$) перейдем от функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ к функции $\omega(u, v, x_3, ..., x_n)$:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = -\omega(u, v, x_3, ..., x_n) + u x_1 + v x_2,\quad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1},\quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2},\quad x_1 = \frac{\partial\omega}{\partial u},\quad x_2 = \frac{\partial\omega}{\partial v}.$$

Частные производные функции $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ находятся по формулам:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = -\omega_{x_k},\ k = 3 \div n;\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial {x_1}^2} = \frac{\omega_{vv}}{\Delta};\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial {x_2}^2} = \frac{\omega_{uu}}{\Delta}; \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2 \partial x_k} = \frac{\omega_{u x_k}\omega_{uv} - \omega_{v x_k}\omega_{uu}}{\Delta},\quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\omega_{v x_k}\omega_{uv} - \omega_{u x_k}\omega_{vv}}{\Delta},\ k = 3 \div n \\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \partial x_m} = -\omega_{x_k x_m} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{u x_k}(\omega_{v x_m}\omega_{uv} - \omega_{u x_m}\omega_{vv}) + \omega_{v x_k}(\omega_{u x_m}\omega_{uv} - \omega_{v x_m}\omega_{uu})),\ k = 3 \div n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\Delta = \omega_{uu}\omega_{vv} - {\omega^2}_{uv} \neq 0$, нижние индексы у функции $\omega(u, v, x_3, ..., x_n)$ обозначают производные. Подставив (1.3) в уравнение (1.1), получим для функции $\omega(u, v, x_3, ..., x_n)$ дифференциальное уравнение, для которого решение двойной волны отыскивается в виде

$$\omega(u, v, x_3, ..., x_n) = \omega_0(u, v) + \sum_{k=1}^{n-2} \omega_{k+2}(u, v) x_{k+2},$$
$$x_1 = \frac{\partial\omega_0}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial\omega_{k+2}}{\partial u} x_{k+2},\quad x_2 = \frac{\partial\omega_0}{\partial v} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\partial\omega_{k+2}}{\partial v} x_{k+2}.$$

Рассмотрим частный случай уравнения (1.1), когда искомая функция зависит от координат x, y, z и времени t:

$$L(x, y, z, t, \Phi, \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial t \partial y}, \frac{\partial^2\Phi}{\partial z \partial t}) = 0. \tag{1.4}$$

При построении решения простой волны перейдем в уравнении (1.4) от функции $\Phi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, y, z, t)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = -\omega(u, y, z, t) + xu,\quad u = \frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad x = \frac{\partial\omega}{\partial u}. \tag{1.5}$$

Частные производные пересчитываются по формулам

$$\Phi_y = -\omega_y;\ \Phi_z = -\omega_z;\ \ \Phi_t = -\omega_t;\ \ \Phi_{xx} = \frac{1}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{xt} = -\frac{\omega_{ut}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{xy} = -\frac{\omega_{uy}}{\omega_{uu}};$$
$$\Phi_{xz} = -\frac{\omega_{uz}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{yy} = \frac{\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{yt} = \frac{\omega_{uy}\omega_{ut} - \omega_{yt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{yz} = \frac{\omega_{uy}\omega_{uz} - \omega_{yz}\omega_{uu}}{\omega_{uu}};$$
$$\Phi_{zz} = \frac{\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{zt} = \frac{\omega_{uz}\omega_{ut} - \omega_{zt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}};\ \ \Phi_{tt} = \frac{\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu}}{\omega_{uu}}. \tag{1.6}$$

Подставив (1.6) в уравнение (1.4), получим дифференциальное уравнение для функции $\omega(u, y, z, t)$:

$$N(u, y, z, t, \omega, \omega_u, \omega_y, \omega_z, \omega_t, \omega_{uu}, \omega_{ut}, \omega_{uy}, \omega_{uz}, \omega_{tt}, \omega_{yt}, \omega_{zt}, \omega_{yz}, \omega_{yy}, \omega_{zz}) = 0.$$

Для построения решения простой волны функция $\omega(u, y, z, t)$ представляется в виде

$$\omega(u, y, z, t) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y + \omega_2(u)z + \omega_3(u)t. \tag{1.7}$$

Тогда $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y + \omega_2'(u)z + \omega_3'(u)t$, $\Phi_y = -\omega_1(u)$, $\Phi_z = -\omega_2(u)$, $\Phi_t = -\omega_3(u)$.

В случае построения решения двойной волны перейдем от функции $\Phi(x, y, z, t)$ к функции $\omega(u, v, z, t)$:

$$\Phi(x, y, z, t) = -\omega(u, v, z, t) + xu + yv, \quad u = \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ x = \frac{\partial \omega}{\partial u},\ y = \frac{\partial \omega}{\partial v}. \tag{1.8}$$

Тогда частные производные находятся по формулам:

$$\Phi_z = -\omega_z;\ \Phi_t = -\omega_t;\ \Phi_{yt} = \frac{\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu}}{\Delta};\ \Phi_{yz} = \frac{\omega_{uz}\omega_{uv} - \omega_{vz}\omega_{uu}}{\Delta};$$
$$\Phi_{xx} = \frac{\omega_{vv}}{\Delta};\ \Phi_{xt} = \frac{-\omega_{ut}\omega_{vv} + \omega_{vt}\omega_{uv}}{\Delta};\ \Phi_{xy} = \frac{-\omega_{uv}}{\Delta};\ \Phi_{xz} = \frac{-\omega_{uz}\omega_{vv} + \omega_{vz}\omega_{uv}}{\Delta};$$
$$\Phi_{yy} = \frac{\omega_{uu}}{\Delta};\ \Phi_{zz} = -\omega_{zz} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{uz}(\omega_{vz}\omega_{uv} - \omega_{uz}\omega_{vv}) + \omega_{vz}(\omega_{uz}\omega_{uv} - \omega_{vz}\omega_{uu}));$$
$$\Phi_{tt} = -\omega_{tt} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{ut}(\omega_{vt}\omega_{uv} - \omega_{ut}\omega_{vv}) + \omega_{vt}(\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu}));$$
$$\Phi_{zt} = -\omega_{zt} - \frac{1}{\Delta}(\omega_{uz}(\omega_{vt}\omega_{uv} - \omega_{ut}\omega_{vv}) + \omega_{vz}(\omega_{ut}\omega_{uv} - \omega_{vt}\omega_{uu}));$$

где $\Delta = \omega_{uu}\omega_{vv} - \omega_{uv}^2 \neq 0$. Для функции $\omega(u, v, z, t)$ получим дифференциальное уравнение:

$$N(u, v, z, t, \omega, \omega_u, \omega_v, \omega_t, \omega_z, \omega_{uu}, \omega_{ut}, \omega_{uv}, \omega_{uz}, \omega_{tt}, \omega_{vt}, \omega_{zt}, \omega_{vz}, \omega_{vv}, \omega_{zz}) = 0.$$

Для построения решения двойной волны функция $\omega(u, v, z, t)$ представляется в виде

$$\omega(u, v, z, t) = \omega_0(u, v) + \omega_1(u, v)z + \omega_2(u, v)t.$$

Замечание. Если уравнение (1.4) представляет собой квазилинейное уравнение, в котором искомая функция зависит от двух переменных:

$$f_1(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xx} + f_2(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{xy} + f_3(\Phi_x, \Phi_y)\Phi_{yy} = 0, \tag{1.9}$$

то с помощью преобразования (1.8), которое в данном случае является преобразованием Лежандра:

$$\Phi(x, y) = -\omega(u, v) + xu + yv,\ u = \frac{\partial \Phi}{\partial x},\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y},\ x = \frac{\partial \omega}{\partial u},\ y = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \tag{1.10}$$

для функции $\omega(u,v)$ получим линейное уравнение:

$$f_1(u,v)\omega_{vv} - f_2(u,v)\omega_{uv} + f_3(u,v)\omega_{uu} = 0.$$

Аналогично, уравнение более общего вида

$$\begin{gathered}f_1(\Phi_x,\Phi_y)\Phi_{xx} + f_2(\Phi_x,\Phi_y)\Phi_{xy} + f_3(\Phi_x,\Phi_y)\Phi_{yy} + f_4(x,y,\Phi_x,\Phi_y)(\Phi_{xx}\Phi_{yy} - \Phi_{xy}^2) = 0,\\ f_4(x,y,\Phi_x,\Phi_y) = f_4^0(\Phi_x,\Phi_y) + f_5^0(\Phi_x,\Phi_y)x + f_6^0(\Phi_x,\Phi_y)y\end{gathered}$$

с помощью преобразования (1.10) также приводится к линейному:

$$f_1(u,v)\omega_{vv} - f_2(u,v)\omega_{uv} + f_3(u,v)\omega_{uu} + f_4^0(u,v) + f_5^0(u,v)\omega_u + f_6^0(u,v)\omega_v = 0.$$

2. Решения типа «простая волна» уравнений газовой динамики

Построим решение типа «простая волна» для уравнения, описывающего безвихревые изэнтропические неустановившиеся трехмерные течения газа или жидкости:

$$\begin{gathered}\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + 2\Phi_z\Phi_{zt} + 2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz} + 2\Phi_z\Phi_y\Phi_{zy} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{xx} +\\ +\Phi_y^2\Phi_{yy} + \Phi_z^2\Phi_{zz} - \left[a_0^2 + \tfrac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\Phi_t + \tfrac{1}{2}\Phi_x^2 + \tfrac{1}{2}\Phi_y^2 + \tfrac{1}{2}\Phi_z^2\right)\right](\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

где a_0 - скорость звука в однородном потоке; V_0 - скорость однородного потока; $\chi = \frac{c_p}{c_v} = const$; c_p, c_v - коэффициенты теплоемкости. Функцию $\Phi(x,y,z,t)$ представим в виде (1.5), тогда для функции $\omega(u,y,z,t)$ получим следующее уравнение:

$$\begin{gathered}\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2u\omega_{ut} - 2\omega_y(\omega_{uy}\omega_{ut} - \omega_{yt}\omega_{uu}) - 2\omega_z(\omega_{uz}\omega_{ut} - \omega_{zt}\omega_{uu}) + 2u\omega_z\omega_{uz} +\\ +2\omega_z\omega_y(\omega_{uy}\omega_{uz} - \omega_{yz}\omega_{uu}) + 2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + \omega_z^2(\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu}) -\\ - \left[a_0^2 + \tfrac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_t + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}\omega_z^2\right)\right]\left(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu})\right) = 0\end{gathered}$$

Для построения решения простой волны функция $\omega(u,y,z,t)$ представляется в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$:

$$\begin{gathered}(\omega_3')^2 - 2u\omega_3' - 2\omega_1\omega_1'\omega_3' - 2\omega_2\omega_2'\omega_3' + 2u\omega_2\omega_2' + 2\omega_1\omega_2\omega_1'\omega_2' + 2u\omega_1\omega_1' + u^2 + \omega_1^2(\omega_1')^2 +\\ +\omega_2^2(\omega_2')^2 - \left[a_0^2 + \tfrac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_3 + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}\omega_2^2\right)\right]\left(1 + (\omega_1')^2 + (\omega_2')^2\right) = 0\end{gathered}$$

Две из функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$ можно выбрать произвольно, произвольной остается также функция $\omega_0(u)$. Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y + \omega_2'(u)z + \omega_3'(u)t$, $\Phi_y = -\omega_1(u)$, $\Phi_z = -\omega_2(u)$, $\Phi_t = -\omega_3(u)$. Скорость газа V, давление P, плотность ρ, скорость звука a находятся по формулам:

$$\begin{gathered}V = \sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2} = \sqrt{u^2 + \omega_1^2(u) + \omega_2^2(u)};\\ \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{\chi-1}{\chi}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\chi-1} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = 1 + \frac{\chi-1}{2}\frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2}(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2) =\\ = 1 + \frac{\chi-1}{2}\frac{V_0^2}{a_0^2} - \frac{\chi-1}{a_0^2}(-\omega_3(u) + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2)\end{gathered}$$

В случае, когда течение одномерное $(\Phi_y = 0, \Phi_z = 0)$ и нестационарное, уравнение (2.1) принимает вид:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + \Phi_x^2\Phi_{xx} - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_x^2\right)\right]\Phi_{xx} = 0$$

Для построения решения простой волны перейдем от функции $\Phi(x,t)$ к функции $\omega(u,t)$. Тогда получим уравнение для $\omega(u,t)$:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2u\omega_{ut} + u^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_t + \frac{1}{2}u^2\right)\right] = 0$$

Задавая функцию $\omega(u,t)$ в виде $\omega(u,t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$:

$$(\omega_3')^2 - 2u\omega_3' + u^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(-\omega_3 + \frac{1}{2}u^2\right)\right] = 0.$$

Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной, т.е. получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega_0'(u) + \omega_3'(u)t$.

Если течение двумерное ($\Phi_z = 0$) и стационарное ($\Phi_t = 0$), то уравнение (2.1) примет вид:

$$2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{xx} + \Phi_y^2\Phi_{yy} - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_y^2\right)\right](\Phi_{xx} + \Phi_{yy}) = 0 \quad (2.2)$$

После перехода от функции $\Phi(x,y)$ к функции $\omega(u,y)$ получим следующее уравнение

$$2u\omega_y\omega_{uy} + u^2 + \omega_y^2(\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_y^2\right)\right]\left(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu})\right) = 0$$

Представляя решение простой волны в виде $\omega(u,y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$, получим уравнение для $\omega_1(u)$:

$$2u\omega_1\omega_1' + u^2 + \omega_1^2(\omega_1')^2 - \left[a_0^2 + \frac{\chi-1}{2}V_0^2 - (\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\right)\right]\left(1 + (\omega_1')^2\right) = 0$$

Получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$: $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y$.

3. Решения простой волны для приближенных уравнений в газовой динамике

Линейное разложение. Предполагая, что имеют место малые возмущения однородного потока, движущегося со скоростью V в направлении оси Ox, представим $\Phi(x,y,z,t)$ в виде:

$$\Phi(x,y,z,t) = V_0x + \varepsilon\varphi(x,y,z,t) + ..., \quad \text{где } \varepsilon \ll 1.$$

Тогда, оставляя в (2.1) старшие члены (порядка ε), получим линейное уравнение для функции $\varphi(x,y,z,t)$:

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0. \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) - асимптотическое уравнение линейной теории. При построении решения простой волны для уравнения (3.1) перейдем по формуле (1.5) от функции $\varphi(x,y,z,t)$ к функции $\omega(u,y,z,t)$. Тогда уравнение для $\omega(u,y,z,t)$ будет иметь вид:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2(1 + (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) + (\omega_{uz}^2 - \omega_{zz}\omega_{uu})) = 0.$$

Решение простой волны отыскивается в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$:

$$(\omega_3')^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2(1 + (\omega_1')^2 + (\omega_2')^2) = 0.$$

Две из функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$ можно выбрать произвольно. Произвольной также остается функция $\omega_0(u)$. Таким образом, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x = \omega_0'(u) + \omega_1'(u)y + \omega_2'(u)z + \omega_3'(u)t$.

Для неустановившегося одномерного течения ($\varphi_y = 0$, $\varphi_z = 0$) уравнение (3.1) принимает вид:

$$\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2\varphi_{xx} = 0. \qquad (3.2)$$

При построении решения простой волны этого уравнения необходимо перейти от функции $\varphi(x,t)$ к функции $\omega(u,t)$. Тогда уравнение для $\omega(u,t)$ запишется следующим образом:

$$\omega_{ut}^2 - \omega_{tt}\omega_{uu} - 2V_0\omega_{ut} + V_0^2 - a_0^2 = 0.$$

Задавая функцию $\omega(u,t)$ в виде $\omega(u,t) = \omega_0(u) + \omega_3(u)t$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega_3')^2 - 2V_0\omega_3' + V_0^2 - a_0^2 = 0$, общее решение которого: $\omega_3(u) = (V_0 \pm a_0)u + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x = \omega_0'(u) + (V_0 \pm a_0)t$. Тогда

$$u = f(x - (V_0 \pm a_0)t), \qquad (3.3)$$

т.е. получено решение, описывающее возмущения, распространяющиеся вниз (знак «+») или вверх (знак «-») по течению. Заметим, что общее решение уравнения (3.2) имеет вид: $\varphi(x,t) = f(x - (V_0 + a_0)t) + g(x - (V_0 - a_0)t)$, где f, g - произвольные функции. Это решение является суммой двух решений, получающихся из (3.3) при выборе знака «-» и знака «+».

Для плоских ($\varphi_z = 0$) установившихся ($\varphi_t = 0$) течений согласно (3.1), имеем уравнение (волновое при $M_0 > 1$; приводящееся к уравнению Лапласа при $M_0 < 1$):

$$(M_0^2 - 1)\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0, \qquad (3.4)$$

где $M_0 = \dfrac{V_0}{a_0}$ - число Маха. После перехода от функции $\varphi(x,y)$ к функции $\omega(u,y)$, получим уравнение для $\omega(u,y)$:

$$M_0^2 - 1 - (\omega_{uy}^2 - \omega_{yy}\omega_{uu}) = 0.$$

Задавая функцию $\omega(u,y)$ в виде $\omega(u,y) = \omega_0(u) + \omega_1(u)y$, для $\omega_1(u)$ получим дифференциальное уравнение: $M_0^2 - 1 - (\omega_1')^2 = 0$, общее решение которого существует при $M_0 > 1$: $\omega_1(u) = \pm u\sqrt{M_0^2 - 1} + C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. В этом случае получено решение, зависящее от одной произвольной функции:

$$x = \omega_0'(u) \pm y\sqrt{M_0^2 - 1}, \quad u = f(x \mp y\sqrt{M_0^2 - 1}). \qquad (3.5)$$

Полученное решение можно использовать для описания течения, возникающего при сверхзвуковом $(V_0 > a_0)$ обтекании профиля. Общее решение уравнения (3.4) имеет вид: $\varphi(x,y) = f(x - y\sqrt{M_0^2 - 1}) + g(x + y\sqrt{M_0^2 - 1})$, где f, g - произвольные функции. Оно состоит из двух решений, получаемых из (3.5) при выборе знака «+» и знака «-».

Трансзвуковое разложение. а) Для течений, скорость которых близка к скорости звука, рассмотрим трансзвуковое разложение функции $\Phi(x,y,z,t)$:

$\Phi(x,y,z,t) = V_0x+\varepsilon^2\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$, где $x=\varepsilon\overline{x}, y=\sqrt{\varepsilon}\overline{y}$, $z=\sqrt{\varepsilon}\overline{z}$, $t=\overline{t}$, $\varepsilon \ll 1$, $V_0^2-a_0^2\sim\varepsilon$.

Подставляя в (2.1) и оставляя члены порядка ε, получим нелинейное уравнение трансзвуковой теории движения идеального газа:

$$2V_0\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{t}} + V_0^2\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} + V_0(\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} - a_0^2(\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}} + \overline{\varphi}_{\overline{z}\overline{z}}) = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) описывает течения, содержащие как области с дозвуковой скоростью, так и области со сверхзвуковой скоростью. При построении решения типа "простая волна" для уравнения (3.6) перейдем от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ запишется в следующем виде:

$$-2V_0\omega_{u\overline{t}} + V_0^2 + V_0(\chi+1)u - a_0^2(1+(\omega_{u\overline{y}}^2 - \omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu}) + (\omega_{u\overline{z}}^2 - \omega_{\overline{z}\overline{z}}\omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(V_0^2-a_0^2) - 2V_0\omega_3' + V_0(\chi+1)u - a_0^2((\omega_1')^2 + (\omega_2')^2) = 0.$$

С учетом того, что $\omega_0(u)$ также произвольная функция, получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x=\omega_0'(u)+\omega_1'(u)\overline{y}+\omega_2'(u)\overline{z}+\omega_3'(u)\overline{t}$.

Построим решение простой волны для нестационарного одномерного течения (в (3.6) $\overline{\varphi}_{\overline{y}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$). После перехода от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u,\overline{t})$:

$$-2V_0\omega_{u\overline{t}} + V_0^2 + V_0(\chi+1)u - a_0^2 = 0. \tag{3.7}$$

Функция $\omega(u,\overline{t})$ задается в виде $\omega(u,\overline{t})=\omega_0(u)+\omega_3(u)\overline{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $-2V_0\omega_3'+V_0^2-a_0^2+V_0(\chi+1)u=0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u)=\dfrac{\chi+1}{4}u^2+\dfrac{V_0^2-a_0^2}{2V_0}u+C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x=\omega_0'(u)+\dfrac{1}{2V_0}(V_0(\chi+1)u+V_0^2-a_0^2)\overline{t}$. Заметим, что в этом случае решение простой волны является общим решением уравнения (3.7).

В случае, когда течение двумерное установившееся ($\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{t}}=0$), уравнение (3.6) будет иметь вид:

$$V_0^2\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} + V_0(\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} - a_0^2(\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} + \overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}}) = 0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y})$ к функции $\omega(u,\overline{y})$. Тогда для функции $\omega(u,\overline{y})$ получим уравнение:

$$V_0^2 + V_0(\chi+1)u - a_0^2(1+(\omega_{u\overline{y}}^2 - \omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu})) = 0.$$

Функцию $\omega(u,\overline{y})$ зададим в виде: $\omega(u,\overline{y})=\omega_0(u)+\omega_1(u)\overline{y}$. Для $\omega_1(u)$ получим уравнение: $(V_0^2-a_0^2)+V_0(\chi+1)u-a_0^2(\omega_1')^2=0$. Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$, будет иметь вид: $x=\omega_0'+\dfrac{\overline{y}}{a_0}\sqrt{(V_0^2-a_0^2)+V_0(\chi+1)u}$.

б) Рассмотрим частный случай уравнения (3.6), когда скорость однородного потока V_0 равна скорости звука в однородном потоке a_0. Тогда получим асимптотическое трансзвуковое уравнение:

$$2\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{t}} + (\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}} - a_0(\overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}} + \overline{\varphi}_{\overline{z}\overline{z}}) = 0. \tag{3.8}$$

После перехода к функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ по формуле (1.5) получим уравнение для функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$:

$$-2\omega_{u\overline{t}}+(\chi+1)u-a_0((\omega_{u\overline{y}}^2-\omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu})+(\omega_{u\overline{z}}^2-\omega_{\overline{z}\overline{z}}\omega_{uu}))=0.$$

Функцию $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$-2\omega_3^{'}+(\chi+1)u-a_0((\omega_1^{'})^2+(\omega_2^{'})^2)=0.$$

Так как $\omega_0(u)$ есть произвольная функция, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x=\omega_0^{'}(u)+\omega_1^{'}(u)\overline{y}+\omega_2^{'}(u)\overline{z}+\omega_3^{'}(u)\overline{t}$.

Для нестационарного одномерного течения (в (3.8) $\overline{\varphi}_{\overline{y}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$) после перехода от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u,\overline{t})$:

$$-2\omega_{u\overline{t}}+(\chi+1)u=0. \tag{3.9}$$

Функция $\omega(u,\overline{t})$ задается в виде $\omega(u,\overline{t})=\omega_0(u)+\omega_3(u)\overline{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $-2\omega_3^{'}+(\chi+1)u=0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u)=\dfrac{\chi+1}{4}u^2+C$. Функция $\omega_0(u)$ остается произвольной. Получено решение, зависящее от одной произвольной функции: $x=\omega_0^{'}(u)+\dfrac{(\chi+1)}{2}u\overline{t}$. Решение простой волны является общим решением уравнения (3.9).

В случае, когда течение двумерное установившееся ($\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{t}}=0$), уравнение (3.8) будет иметь вид:

$$(\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}-a_0\overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}}=0.$$

При построении решения простой волны перейдем от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y})$ к функции $\omega(u,\overline{y})$. Тогда для функции $\omega(u,\overline{y})$ получим уравнение:

$$(\chi+1)u-a_0(\omega_{u\overline{y}}^2-\omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu})=0.$$

Функцию $\omega(u,\overline{y})$ зададим в виде: $\omega(u,\overline{y})=\omega_0(u)+\omega_1(u)\overline{y}$. Для $\omega_1(u)$ получим уравнение: $(\chi+1)u-a_0(\omega_1^{'})^2=0$. Тогда решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$, существует лишь при $u>0$ и имеет вид: $x=\omega_0^{'}+\dfrac{\overline{y}}{a_0}\sqrt{a_0(\chi+1)u}$.

в) Уточним уравнение (3.6), добавив в него линейный член порядка ε^2 трансзвукового разложения функции $\Phi(x,y,z,t)$. Тогда получим составное уравнение:

$$\overline{\varphi}_{\overline{t}\overline{t}}+2V_0\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{t}}+V_0^2\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}+V_0(\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}-a_0^2(\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}+\overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}}+\overline{\varphi}_{\overline{z}\overline{z}})=0. \tag{3.10}$$

Это уравнение содержит все члены как уравнения (3.1), так и уравнения (3.6). При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.10) перейдем от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ запишется в следующем виде:

$$\omega_{u\overline{t}}^2-\omega_{\overline{t}\overline{t}}\omega_{uu}-2V_0\omega_{u\overline{t}}+V_0^2+V_0(\chi+1)u-a_0^2(1+(\omega_{u\overline{y}}^2-\omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu})+(\omega_{u\overline{z}}^2-\omega_{\overline{z}\overline{z}}\omega_{uu}))=0.$$

Представляя функцию $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ в виде (1.7), получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(\omega_3^{'})^2-2V_0\omega_3^{'}+(V_0^2-a_0^2)+V_0(\chi+1)u-a_0^2((\omega_1^{'})^2+(\omega_2^{'})^2)=0.$$

Так как $\omega_0(u)$ является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x=\omega_0'(u)+\omega_1'(u)\overline{y}+\omega_2'(u)\overline{z}+\omega_3'(u)\overline{t}$.

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.10) $\overline{\varphi}_{\overline{y}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$). После перехода от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u,\overline{t})$:

$$\omega_{u\overline{t}}^2-\omega_{\overline{t}\overline{t}}\omega_{uu}-2V_0\omega_{u\overline{t}}+V_0^2+V_0(\chi+1)u-a_0^2=0. \tag{3.11}$$

Функцию $\omega(u,\overline{t})$ зададим в виде $\omega(u,\overline{t})=\omega_0(u)+\omega_3(u)\overline{t}$. Тогда получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega_3')^2-2V_0\omega_3'+V_0^2-a_0^2+V_0(\chi+1)u=0$, общее решение которого имеет вид: $\omega_3(u)=V_0u\mp\dfrac{2}{3V_0(\chi+1)}(a_0^2-V_0(\chi+1)u)^{\frac{3}{2}}+C$. Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$: $x=\omega_0'(u)+(V_0\pm\sqrt{a_0^2-V_0(\chi+1)u})\overline{t}$.

Если течение двумерное установившееся ($\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{t}}=0$), то уравнение (3.10) принимает вид уравнения (3.6) в двумерном установившемся случае.

г) Наряду с уравнением (3.10) для описания околозвуковых течений газа используют также следующее составное уравнение:

$$\overline{\varphi}_{\overline{t}\overline{t}}+2V_0\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{t}}+V_0^2\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}+[V_0(\chi+1)\overline{\varphi}_{\overline{x}}+(\chi-1)\overline{\varphi}_{\overline{t}}]\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}-a_0^2(\overline{\varphi}_{\overline{x}\overline{x}}+\overline{\varphi}_{\overline{y}\overline{y}}+\overline{\varphi}_{\overline{z}\overline{z}})=0. \tag{3.12}$$

При построении решения типа «простая волна» для уравнения (3.12) перейдем от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ по формуле (1.5). Уравнение для функции $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ запишется в следующем виде:

$$\omega_{u\overline{t}}^2-\omega_{\overline{t}\overline{t}}\omega_{uu}-2V_0\omega_{u\overline{t}}+V_0^2+[V_0(\chi+1)u-(\chi-1)\omega_t]-a_0^2(1+(\omega_{u\overline{y}}^2-\omega_{\overline{y}\overline{y}}\omega_{uu})+(\omega_{u\overline{z}}^2-\omega_{\overline{z}\overline{z}}\omega_{uu}))=0.$$

Функцию $\omega(u,\overline{y},\overline{z},\overline{t})$ зададим в виде (1.7). Тогда получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение для трех функций $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, $\omega_3(u)$, две из которых можно выбрать произвольно:

$$(\omega_3')^2-2V_0\omega_3'+(V_0^2-a_0^2)+V_0(\chi+1)u-(\chi-1)\omega_3-a_0^2((\omega_1')^2+(\omega_2')^2)=0.$$

Так как $\omega_0(u)$ является произвольной функцией, то получено решение, зависящее от трех произвольных функций: $x=\omega_0'(u)+\omega_1'(u)\overline{y}+\omega_2'(u)\overline{z}+\omega_3'(u)\overline{t}$.

Построим решение простой волны в случае нестационарного одномерного течения (в (3.12) $\overline{\varphi}_{\overline{y}}=0$, $\overline{\varphi}_{\overline{z}}=0$). После перехода от функции $\overline{\varphi}(\overline{x},\overline{t})$ к функции $\omega(u,\overline{t})$ получим уравнение для функции $\omega(u,\overline{t})$:

$$\omega_{u\overline{t}}^2-\omega_{\overline{t}\overline{t}}\omega_{uu}-2V_0\omega_{u\overline{t}}+V_0^2+V_0(\chi+1)u-(\chi-1)\omega_t-a_0^2=0. \tag{3.13}$$

Задавая функцию $\omega(u,\overline{t})$ в виде $\omega(u,\overline{t})=\omega_0(u)+\omega_3(u)\overline{t}$, получим дифференциальное уравнение для $\omega_3(u)$: $(\omega_3')^2-2V_0\omega_3'+V_0^2-a_0^2+V_0(\chi+1)u-(\chi-1)\omega_3=0$, общее решение которого можно найти. Таким образом, получено решение, зависящее от одной произвольной функции $\omega_0(u)$.

4. Построение решений двойной волны уравнений газовой динамики

а) В качестве примера построим решение двойной волны для уравнения (2.2), описывающего безвихревые изэнтропические двумерные установившиеся течения газа или жидкости. Заметим, что уравнение имеет вид (1.9), поэтому с помощью преобразования Лежандра (1.10) для функции $\omega(u,v)$ получим линейное уравнение:

$$-2uv\omega_{uv}+u^2\omega_{vv}+v^2\omega_{uu}-\left[a_0^2+\frac{\chi-1}{2}V_0^2-(\chi-1)\left(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2\right)\right](\omega_{vv}+\omega_{uu})=0. \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) можно искать в виде функции, зависящей от ξ: $\omega=f(\xi)$, где $\xi=u^2+v^2$. Для функции $f(\xi)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\xi f'(\xi)-[2a_0^2+(\chi-1)(V_0^2-\xi)](f'(\xi)-\xi f''(\xi))=0,$$

общее решение которого $f(\xi,C_1,C_2) = \int e^{\int h(\xi)d\xi+C_1}d\xi + C_2$, где $h(\xi) = \dfrac{2a_0^2+(\chi-1)V_0^2-\chi\xi}{\xi[2a_0^2+(\chi-1)(V_0^2-\xi)]}$.

б) Построим решение двойной волны для асимптотического трансзвукового уравнения:

$$2\varphi_{xt}+(\chi+1)\varphi_x\varphi_{xx}-a_0(\varphi_{yy}+\varphi_{zz})=0. \quad (4.2)$$

Переходя в (4.2) от функции $\varphi(x,y,z,t)$ к функции $\omega(u,v,z,t)$ по формулам (1.8), получим уравнение для функции $\omega(u,v,z,t)$:

$$\begin{aligned}&2(\omega_{vt}\omega_{uv}-\omega_{ut}\omega_{vv})+(\chi+1)u\omega_{vv}-a_0(\omega_{uu}-\omega_{zz}(\omega_{uu}\omega_{vv}-\omega_{uv}^2)-\omega_{uz}(\omega_{vz}\omega_{uv}-\omega_{uz}\omega_{vv})-\\&-\omega_{vz}(\omega_{uz}\omega_{uv}-\omega_{vz}\omega_{uu}))=0.\end{aligned}$$

Функцию $\omega(u,v,z,t)$ представим в виде: $\omega(u,v,z,t)=\omega_0(u,v)+\omega_1(u,v)z+\omega_2(u,v)t$. Тогда получим систему уравнений для функций $\omega_0(u,v)$, $\omega_1(u,v)$, $\omega_2(u,v)$:

$$\begin{aligned}&(-2\omega_{2u}+(\chi+1)u+a_0\omega_{1u}^2)\omega_{kvv}+(-a_0+\omega_{1v}^2)\omega_{kuu}+2(\omega_{2v}+a_0\omega_{1u}\omega_{1v})\omega_{kuv}=0,\\&k=0,1,2.\end{aligned} \quad (4.3)$$

Для функции $\omega_0(u,v)$ имеем линейное уравнение. Можно показать, что существуют функции $\omega_1(u,v)$, $\omega_2(u,v)$, которые обращают в нуль коэффициенты перед старшими производными в (4.3) (например, $\omega_k(u,v)=b_kv+F_k(u),\ k=1,2$). В этом случае функция $\omega_0(u,v)$ - произвольная.

Следует отметить, что в плоском стационарном случае (в (4.2) $\varphi_z=0$, $\varphi_t=0$) получим линейное уравнение для плоских течений:

$$(\chi+1)u\omega_{vv}-a_0\omega_{uu}=0, \quad (4.4)$$

для которого можно построить широкие классы решений. В частности, решение уравнения (4.4) можно искать в виде: $\omega(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)(A_ncos(v\lambda_n)+B_nsin(v\lambda_n))$, где функции $g_n(u)$ являются решениями уравнения Эйри. Можно также положить $\omega(u,v)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(u)e^{\lambda_nv}$.

В плоском нестационарном случае (в (4.2) $\varphi_z=0$) система уравнений для решения типа двойной волны имеет вид:

$$(-2f_2+(\chi+1)u)g_{kv}-a_0f_{ku}+2g_2f_{kv}=0,\ f_{kv}=g_{ku},\ k=0,2, \quad (4.5)$$

где $f_k=\omega_{ku}$, $g_k=\omega_{kv}$. Решение замкнутой относительно функций f_2, g_2 нелинейной системы можно отыскивать в параметрическом виде:

$$f_2=\sum_{k=0}^{\gamma}F_k(\xi)\eta^k,\ g_2=\sum_{k=0}^{\theta}G_k(\xi)\eta^k,\ u=\sum_{k=0}^{\alpha}U_k(\xi)\eta^k,\ v=\sum_{k=0}^{\beta}V_k(\xi)\eta^k.$$

Для функций f_0, g_0 в (4.5) имеем линейную систему.

Аналогичным образом можно построить решения двойных волн для приближенных уравнений в газовой динамике:

1) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
2) $2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + V_0(\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
3) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + V_0(\chi + 1)\varphi_x\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$;
4) $\varphi_{tt} + 2V_0\varphi_{xt} + V_0^2\varphi_{xx} + [V_0(\chi + 1)\varphi_x + (\chi - 1)\varphi_t]\varphi_{xx} - a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) = 0$.

Список литературы

1. Меньших О.Ф. О бегущих волнах для нелинейных уравнений с частными производными второго порядка. – Известия высших учебных заведений. Математика. №4 (119), 1972, с.84-92.

2. Вельмисов П.А., Фалькович С.В. Некоторые классы решений околозвуковых уравнений и уравнений коротких волн. – Сборник "Избранные проблемы прикладной механики посвященный шестидесятилетию академика В.Н.Челомея. Москва, 1974, с.215-222.

3. П.А. Вельмисов Асимптотические уравнения газовой динамики. Изд-во Сарат. ун-та, 1986, 136 с.

4. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. - 368 с.

5. Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. - Новосибирск, Наука, 1984, 272 с.

6. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - Изд. 2-е, перераб. и доп. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» , М., 1978, 687 с.

About some classes of the solutions of gas dynamics equations

© P. A. Velmisov[3], J. A. Kazakova[4]

Abstract. The solutions of the type «traveling wave» [1] are constructed for differential equations in gas dynamics. The method is proposed to obtain solutions of this type without the use of the method of differential relations, requiring the analyze of the compatibility of overdetermined systems [4-6]. For example the solutions of simple and dual waves are constructed.

Key Words: partial differential equations, gas dynamics equations, traveling waves, simple waves, dual waves.

[3]Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[4]Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; kazakovaua@mail.ru