

УДК 519.64;538.945;537.62

# Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина

© Н. Д. Кузьмичев<sup>1</sup> А. А. Федченко<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе найдена простая аналитическая зависимость распределения экранирующего сверхпроводящего тока в рамках модели Бина с учетом искривления линий магнитного поля, жестких сверхпроводников второго рода имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток) находящихся в критическом состоянии. На основе найденного распределения рассчитаны полная напряженность магнитного поля и петля гистерезиса намагниченности образцов вышеуказанной формы в разных случаях.

**Ключевые слова:** жесткий сверхпроводник второго рода, высокотемпературный сверхпроводник, критическое состояние, критическая плотность тока, намагниченность, интегральное уравнение первого рода, карта распределения экранирующего сверхтока

## 1. Введение

Магнитные свойства высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) важны для применений в электро- и радиоизмерительной технике. В связи с этим важно знать отклик различной геометрической формы сверхпроводников на переменное и постоянное магнитные поля. Для этого необходимо иметь карту распределения экранирующего сверхпроводящего тока (сверхтока) и намагниченность образца. Работы по вышеотмеченной тематике, ведутся давно как в отечественной, так и зарубежной литературе, например [1-7]. В простейших расчетах намагниченности жестких сверхпроводников второго рода находящихся в критическом состоянии принималась полная экранировка внешнего поля в центре образца или на его оси, например, цилиндра или пластины. В этом случае распределение поля и сверхтока описывается дифференциальным уравнением. При этом сверхпроводник (цилиндр, пластина) разбивается на замкнутые области прямоугольного сечения с противоположно текущими сверхтоками, экранирующими возрастающие и убывающие внешние магнитные поля, что значительно упрощает расчеты намагниченности.

Точное решение задачи распределения сверхтока для бесконечно тонких дисков найдено Михеенко и Кузовлевым в работе [3]. В работах Брандта, например, в [5] численным методом решения интегрального уравнения 2-го рода получены численные распределения сверхтока в цилиндрах любой длины. Для этого интегральное уравнение первого рода было сведено к уравнению второго рода путем задания явного вида вольтамперной характеристики сверхпроводника с помощью уравнений электродинамики описывающих сверхпроводник. Имеются и другие работы (например, см. список литературы), но наиболее значимые отмечены выше в данном абзаце.

Численные зависимости не всегда удобны и их нахождение для конкретных случаев требует на каждом этапе численных решений интегральных уравнений. В связи с этим

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

<sup>2</sup>Аспирант, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; starlightalex@gmail.com.

возникает необходимость иметь в своем арсенале аналитическое выражение распределения экранирующего сверхтока в сверхпроводнике имеющего форму, например, цилиндра любой длины.

## 2. Постановка задачи и модель расчета

В настоящей работе найдено приближенное аналитическое решение интегрального уравнения, описывающего распределение экранирующего сверхтока, и численно смоделирован процесс проникновения магнитного поля в короткий цилиндр жесткого сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии в рамках модели Бина [1] с учетом искривления силовых линий магнитного поля. Магнитное поле в такие сверхпроводники проникает в виде потока, образованного нитями Абрикосова и распространяется фронтом внутрь сверхпроводника, преодолевая силу пиннинга. Силовые линии магнитного поля как внутри такого сверхпроводника, так и вне него искривлены. Изменение магнитного потока внутри указанного сверхпроводника вызывает в области проникновения нитей Абрикосова электрическое поле, которое в свою очередь, мгновенно создает экранирующий сверхток с критической плотностью  $J_c$ . В модели Бина величина  $J_c$  не зависит от локальной плотности магнитного потока.

Полное магнитное поле (сумма внешнего аксиально-направленного поля и поля созданного экранирующим сверхтоком сверхпроводящего цилиндра) определяется следующими линейными интегральными уравнениями первого рода, записанными в цилиндрической системе координат [2, 8]. Аксиальная составляющая напряженности  $H_z$  полного магнитного поля определяется выражением:

$$H_z(r, z) = H_0 + \frac{1}{2\pi} \iint_{D^+} G_z(r, z, r', z') J(r', z') dr' dz'. \quad (2.1)$$

Здесь

$$G_z(r, z, r', z') = \frac{1}{\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \left[ K(k) + \frac{r'^2 - r^2 - (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k) \right], \quad (2.2)$$

$$\text{и } k^2 = \frac{4rr'}{(r' + r)^2 + (z - z')^2}.$$

Радиальная составляющая  $H_r$  полного поля есть:

$$H_r(r, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D^+} G_r(r, z, r', z') J(r', z') dr' dz'. \quad (2.3)$$

Где

$$G_r(r, z, r', z') = \frac{z - z'}{r\sqrt{(r' + r)^2 + (z - z')^2}} \left[ -K(k) + \frac{r'^2 + r^2 + (z - z')^2}{(r' - r)^2 + (z - z')^2} E(k) \right]. \quad (2.4)$$

Здесь  $H_0$  – напряженность внешнего аксиально-направленного магнитного поля,  $J(r, z)$  – экранирующий сверхток заполняющий область сверхпроводника  $D^+$ , который направлен в силу симметрии вдоль орта  $\vec{\varphi}$  и не зависит от полярного угла  $\varphi$ ,

$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta / \sqrt{1 - (k \cdot \sin \theta)^2}$  и  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (k \cdot \sin \theta)^2} d\theta$  – полные эллиптические интегралы.

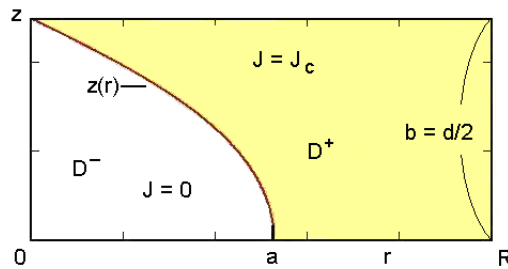
Для того чтобы найти  $J(r, z)$  необходимо, иметь хотя бы приближенные левые части интегральных уравнений (2.1) и (2.3) [9, 10]. Задачи такого рода относятся к классу некорректных задач математической физики (см. например, [9]). Исходя из физических соображений, имеются следующие сведения. Подынтегральные выражения (ядра) уравнений (2.1) и (2.3) описывают напряженность магнитного поля создаваемого бесконечно тонким кольцом радиуса  $r'$  несущим силу тока равную  $Jdr'dz'$  и являются точными решениями уравнений Максвелла [8]. В силу симметрии осевая  $H_z$  (уравнение (2.1)) и радиальная  $H_r$  (уравнение (2.3)) составляющие напряженности полного магнитного поля не зависят от угла  $\varphi$ . При  $z \rightarrow \infty$  и (или)  $r \rightarrow \infty$  составляющие поля  $H_z \rightarrow H_0$  и  $H_r \rightarrow 0$ . В области сверхпроводника, где сверхток отсутствует (экранированная область), т.е.  $J(r, z) = 0$  величины  $H_z = 0$  и  $H_r = 0$ . Кроме того, имеется точное решение  $J(r)$  для одномерного случая [3] (распределение тока в бесконечно тонком диске радиуса  $R$ ):

$$J(r) = \begin{cases} J_c \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \frac{r}{R} \left( \frac{R^2 - a^2}{a^2 - r^2} \right)^{1/2} \right], & r < a; \\ J_c, & a < r < R \end{cases} \quad (2.5)$$

Величина  $a$  описывает радиус проникновения сверхтока величиной  $J_c$ .

Следуя вышеприведенным предпосылкам, в настоящей работе определена приближенная аналитическая зависимость (квазирешение [9, 10]) экранирующего сверхтока  $J(r, z)$  в модели Бина для двухмерного случая в цилиндрической геометрии. Найденное выражение имеет вид (рис. 2.1):

$$J(r, z) = \begin{cases} J_c = -|J_c| = \text{const}, & \text{при } r, z \in D^+; \\ 0, & \text{при } r, z \in D^- \end{cases} \quad (2.6)$$



Р и с у н о к 2.1

Сечение четверти сверхпроводящего цилиндра. Закрашенная область  $D^+$  несет ток с критической плотностью  $J_c$  и отделена от области  $D^-$  поверхностью, заданной уравнением  $z(r)$ .

Область  $D^+$  проникновения вихрей в цилиндр от области  $D^-$ , в которой вихри отсутствуют (т.е. область в которой  $J(r, z) = 0$ ), отделяется поверхностью заданной уравнением:

$$z(r) = b \cdot \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{arctg} \left[ \frac{r}{a} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{a}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}} \right] \right\}^{p(a)} \quad (2.7)$$

Здесь  $R$  – радиус и  $d = 2b$  – длина (толщина) цилиндра (диска),  $a$  – радиус проникновения поля при  $z = 0$  (см. рис. 2.1). Показатель степени  $p(a)$  меняется в пределах:  $0 < p(a) < 2$  и зависит также от отношения  $b/R$  (при  $b \rightarrow 0$  величина  $p \rightarrow 1$  и не зависит от значения  $a$ , а при  $b \rightarrow \infty$  следует  $p \rightarrow 0$ ).

В качестве критерия уклонения  $\rho(z, z_t)$  приближенного  $z$  от точного решения  $z_t$  [9, 10] строилась целевая функция  $S$ , которая выбиралась следующим образом. Как было отмечено выше, сверхток и магнитное поле в экранированной области сверхпроводника отсутствуют. То есть в области  $D^-$  мы знаем точное решение. Учитывая, что в области  $D^-$  выполняются равенства  $H_z = 0$  и  $H_r = 0$ , параметр  $p$  можно определить из условия минимума целевой функции:

$$S_{z,r}(p) = \frac{1}{N} \sum_{r_i, z_j \in D^-} \left| \frac{H_{z,r}(r_i, z_j, p)}{H_0} \right| < \varepsilon \quad (2.8)$$

Здесь  $N$  есть число выбранных точек в области  $D^-$ , а величина  $\varepsilon$  определяет точность найденного решения интегральных уравнений (2.1) и (2.3). В нашем случае она составляла менее 0,01 (1%). В случае точных решений  $S = 0$ .

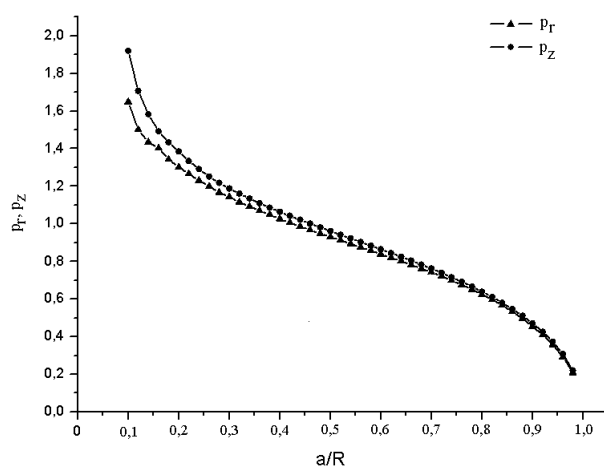
### 3. Алгоритм и структура программы

Для расчёта величины напряженности магнитного поля во всем объеме сверхпроводящего образца и в окружающем его пространстве, была разработана специальная программа на языке C#. Она позволяет достаточно быстро и с заданной точностью произвести расчет карты распределения аксиальной (2.1) и радиальной (2.3) составляющих напряженности магнитного поля, а также намагниченности образца в целом.

При вычислении использовалась сетка  $L \times K$ , в частности на приведенных ниже рисунках сетка размером  $100 \times 50$  (100 шагов вдоль радиуса  $r$  и 50 вдоль оси  $z$ ). Разработанная программа позволяет использовать сетки больших размеров. Для каждого узла этой сетки рассчитывается соответствующие ей величины  $H_z$  и  $H_r$  при заданной величине напряженности  $H_0$  внешнего магнитного поля. Основное “ядро” решения – это вычисление значения двойного интеграла, определяемого уравнениями (2.1) и (2.3). При этом важно было подобрать верный численный метод для решения этой части задачи, обладающий устойчивостью [10, 11]. Также важной частью решаемой задачи было вычисление оптимальной величины параметра  $p$  определяемого выражением (2.8). Для его нахождения при помощи программы была решена отдельная задача оптимизации. Применен численный метод поиска экстремума функции известный как метод “золотого сечения” [11]. Он был выбран из-за его достаточно высокой скорости сходимости.

В качестве целевой функции при решении данной задачи оптимизации была выбрана сумма отклонений  $S$  (см. (2.8)) для области ( $N = 200$  точек), в которой отсутствует магнитное поле (область  $D^-$  на рис. 2.1).

Для каждой составляющей  $H_z$  и  $H_r$  оптимальное значение параметра  $p$  было рассчитано отдельно. Однако можно отметить, что параметры для радиальной  $p_r$  и аксиальной  $p_z$  составляющих поля (рис. 3.1) несколько отличаются при проникновении поля на достаточно большую величину. Данное расхождение обусловлено приближенным характером выражения (2.7).

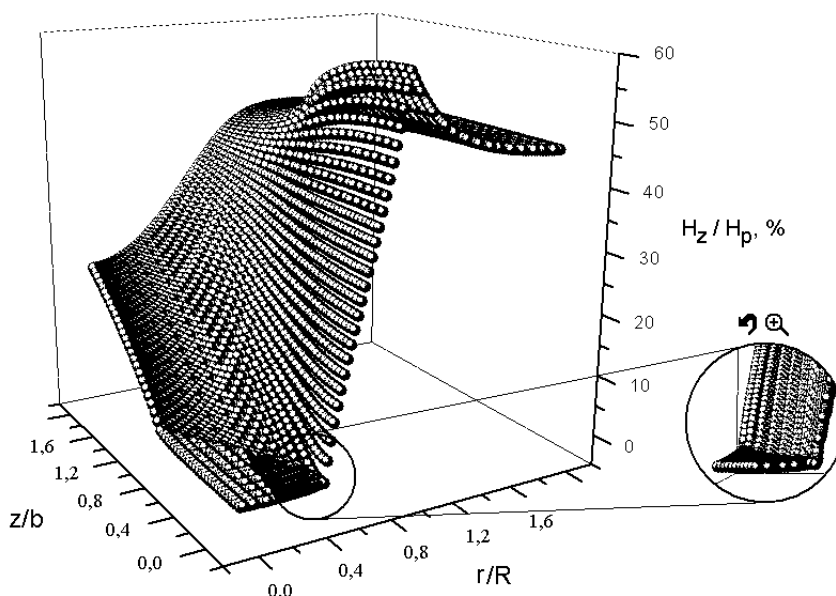


Р и с у н о к 3.1

Зависимость показателя степени  $p$  для радиальной и аксиальной составляющих напряженности полного магнитного поля.

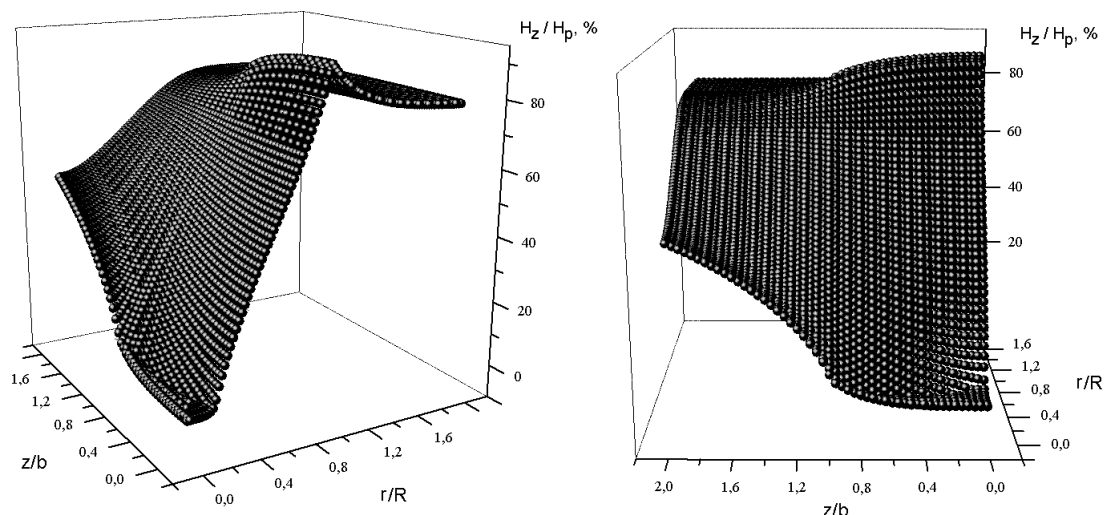
#### 4. Результаты расчета магнитного поля и петли гистерезиса намагниченности

Полученный в итоге двумерный массив представляет собой распределение напряженности магнитного поля в одной четверти фронтального сечения сверхпроводящего образца. Трехмерные графики, демонстрирующие это распределение поля  $H_z(z, r)$  для цилиндра с  $d/2R = 0,25$ , представлены на рис. 4.1 и 4.2.



Р и с у н о к 4.1

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля  $H_z(r, z)$ . Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения  $H_p$ . Радиус проникновения поля составляет:  $a = 0.5R$ .



Р и с у н о к 4.2

Трехмерный график карты распределения радиальной составляющей напряженности полного магнитного поля  $H_z(r, z)$ . Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения  $H_p$ . Радиус проникновения поля составляет:  $a = 0.8R$ . Изометрическая и профильная проекция трехмерной карты.

При этом принималось, что внешнее поле проникло на глубины, определяемые следующими значениями радиуса  $a$ :  $a = 0,5R$  (рис. 4.1) и  $a = 0,8R$  (рис. 4.2). На рисунках величина поля представлена в единицах поля полного проникновения  $H_p$ , т.е. минимальной напряженности внешнего поля  $H_0$ , при которой весь объем сверхпроводника будет занят экранирующим сверхтоком. Величина  $H_p$  определяется численно или её можно рассчитать по формуле:

$$H_p = J_c b \cdot \ln \left[ \frac{R}{b} + \sqrt{1 + \left( \frac{R}{b} \right)^2} \right]. \quad (4.1)$$

Данная формула легко получается из решения дифференциального уравнения критического состояния в модели Бина в приближении экранировки поля в центре короткого цилиндра радиуса  $R$  и полутолщины  $b$ :

$$\frac{dH_z}{dr} = \frac{J_c}{\sqrt{1 + \left( \frac{r}{b} \right)^2}}, \quad H_z(R) = H_0 \quad (4.2)$$

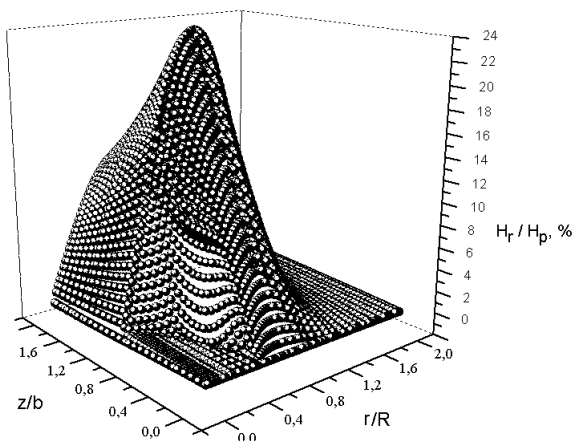
Решением задачи Коши (4.2) есть выражение для аксиальной составляющей поля:

$$H_z(r) = \begin{cases} H_0, & \text{при } r > R; \\ H_0 - J_c b \left[ \text{Arsh} \left( \frac{R}{b} \right) - \text{Arsh} \left( \frac{r}{b} \right) \right], & \text{при } a < r < R; \\ 0, & \text{при } 0 < r < a = b \cdot \text{sh} \left[ \text{Arsh} \left( \frac{R}{b} \right) - \frac{H_0}{J_c b} \right]. \end{cases} \quad (4.3)$$

Из этого выражения вытекает формула для  $H_p$ . Отметим, что при  $H_0 = H_p$  задачи в постановках (2.1) – (2.3) и (4.2) приводят к одинаковым результатам, так как экранированная область сверхпроводника стягивается в точку, находящуюся в центре на оси цилиндра.

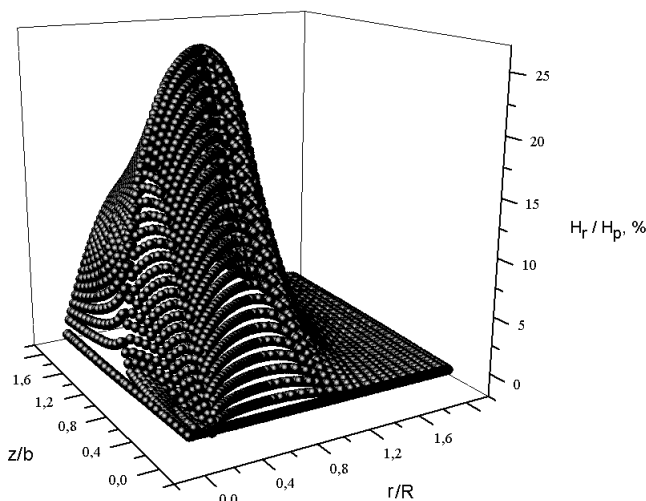
Из рисунков 4.1 и 4.2 видно, что внутренняя область образца  $D^-$ , не затронутая магнитным полем, образует почти ровную поверхность, контур которой определяется уравнением (2.7). В тоже время в остальной области напряженность поля отлична от нуля, а на границе сверхпроводника наблюдается значительный острый “скачок” напряженности. При большом удалении от образца значение поля стремится к величине внешнего поля  $H_0$ , как было отмечено в п. 1.

Аналогичные графики для другой составляющей  $H_r(z, r)$  представлены на рис. 4.3 ( $a = 0,5R$ ) и рис. 4.4 ( $a = 0,85R$ ). Вне объема сверхпроводника вдали от него напряженность радиальной составляющей близится к нулю, так как вектор напряженности внешнего магнитного поля направлен вдоль оси вращения образца.



Р и с у н о к 4.3

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля  $H_z(r, z)$ . Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения  $H_p$ . Радиус проникновения поля составляет:  $a = 0.5R$ .



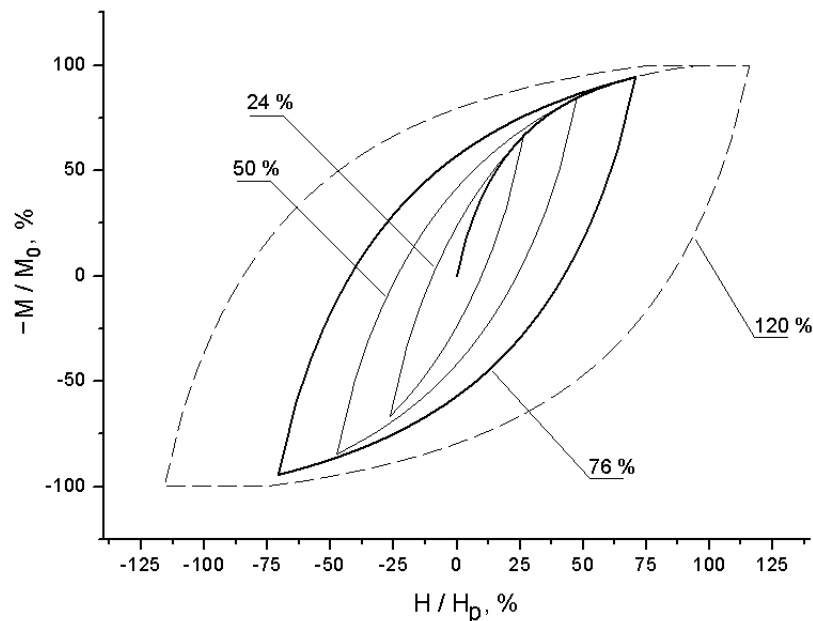
Р и с у н о к 4.4

Трехмерный график карты распределения осевой составляющей напряженности полного магнитного поля  $H_z(r, z)$ . Значение напряженности указаны в процентах от величины напряженности поля полного проникновения  $H_p$ . Радиус проникновения поля составляет:  $a = 0.8R$ .

Начальная кривая и петля гистерезиса намагниченности приведены на рис. 4.5. Расчет производился по найденному распределению экранирующего сверхтока. Намагниченность  $M$  цилиндрического сверхпроводника вычислялась согласно формуле используемой для определения магнитного момента системы токов [8] учитывая, что экранирующий сверхток в силу цилиндрической симметрии является азимутальным:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2V} \iiint_{D^+} [\mathbf{r}, \mathbf{J}_c] dV. \quad (4.4)$$

Здесь  $V$  – объем сверхпроводника,  $D^+$  – область внутренней части цилиндра, занятая сверхтоком. Интеграл (4.4) разбивается на сумму нескольких интегралов с противоположно текущими сверхтоками. На рис. 4.5 приведены кривые намагниченности для разных величин максимальных полей циклов намагничивания. По оси абсцисс отложена напряженность магнитного поля в единицах поля полного проникновения  $H_p$ . По оси ординат отложена намагниченность цилиндра в единицах намагниченности насыщения  $M_0 = J_c R/3$  (иначе в единицах  $M(H_p)$ ), которая получается из выражений (4.2) и (4.4) путем несложных вычислений.



Р и с у н о к 4.5

Начальная кривая намагниченности и петли гистерезиса намагниченности для разных значений максимальных полей цикла намагничивания  $H_{max}$ . Значение поля указано в процентах от  $H_p$ , а величина намагниченности указана единицах намагниченности насыщения.

## 5. Заключение

Результатами работы являются карта распределения экранирующего сверхтока (2.6) в жестких сверхпроводниках второго рода имеющих форму цилиндров конечной длины и дисков (таблеток) в рамках модели Бина и простое уравнение (2.7) поверхности отделяющей области цилиндра (диска) с током и без тока (см. рис. 2.1). Данные уравнения получены с учетом искривления силовых линий магнитного поля. Формула (2.7) включает единственный параметр  $p$  (показатель степени), который легко определяется нахождением минимума целевой функции (2.8). Целевая функция строится на экранированной



области цилиндра и является по своей сути отклонением точного значения поля от приближенного. Расчеты радиальной и аксиальной составляющих поля показали правильность выбора методики. Разработанную методику можно применять и в случае полевой зависимости критической плотности тока. В этом случае интегральные уравнения (2.1) и (2.3) будут нелинейными. В качестве начального приближения можно использовать полученные в работе выражения. Результаты работы можно использовать, например, при разработке магнитометра слабых магнитных полей [13] на основе ВТСП поликристаллов. Как было показано в работах [14, 15] экранирующий сверхток в таких системах в слабых магнитных полях не зависит от величины поля.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bean C.P. Magnetization of hard superconductors// Phys. Rev. Lett. – 1962. – V. 8. – P. 250-251.
2. Frankel D. Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors// J. Appl. Phys. – 1979. – V. 50. – P. 5402-4849.
3. Mikheenko P.N., Kuzovlev Yu.E. Inductance measurements of HTSC films with high critical currents// Physica C. – 1993. – P. 229-236.
4. Clem J.R., Sanchez A. Hysteretic ac losses and susceptibility of thin superconducting disks// Phys. Rev. B. – 1994. – V. 50. – P. 9355-9362.
5. Brandt E.H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves// Phys. Rev. B. – 1998. – V. 58. – P. 6506-6522.
6. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников// ЖТФ. – 1994. – Т. 64., Вып. 12. – С. 63-74.
7. Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Гармоники намагниченности текстурированных поликристаллов  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  выше температуры перехода в сверхпроводящее состояние// ФТТ. – 2007. – Т. 49. – С. 1549-1553.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред// М.: Наука – 1982. – 620 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач// М.: Наука – 1986. – 228 с.
10. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы// Киев: Наукова думка – 1986. – 544 с.
11. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп.// М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.
12. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы// М.: Наука – 1989. – 284 с.
13. Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Славкин В.В. Формирование гармоник с помощью высокотемпературных сверхпроводящих поликристаллов иттриевого купрата// ЖТФ. – 2008. – Т. 78. – С. 59-62.

14. Кузьмичев Н.Д. Критическое состояние среды Джозефсона// Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 74., Вып. 5. – С. 291-295.
15. Кузьмичев Н.Д. Проникновение магнитного поля в систему слабых связей гранулярного сверхпроводника  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  // ФТТ. – 2001. – Т. 43., Вып. 11. – С. 1934-1938.

## Mathematical modeling of the distribution of screening current and magnetization hysteresis of the hard type II superconductors in the form of short cylinders in Bean approximation.

© N. D. Kuzmichev<sup>3</sup> A. A. Fedchenko<sup>4</sup>

**Abstract.** Work finds simple analytic dependence of distribution of screening superconducting current and calculates magnetization within restriction of Bean model and taking into account the curvature of the magnetic field lines for hard type II superconductors in the form of finite length cylinders and discs (tablets). On the basis of the found distribution were calculated total magnetic field intensity and magnetic hysteresis loop for these samples in different cases

**Key Words:** hard superconductor of the second kind, high-temperature superconductor, critical current density, magnetization, integral equation of the first kind, distribution map of the screening supercurrent.

---

<sup>3</sup>Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.

<sup>4</sup>Postgraduate student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; starlightalex@gmail.com