УДК 517.938

О топологии несущего многообразия для диффеоморфизмов Морса-Смейла

© **Е. Я. Гуревич**[1]

Аннотация. В работе рассматривается класс $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на связном замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3 таких, что множество неустойчивых сепаратрис любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Устанавливается, что для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно 3-сфере.

Ключевые слова: динамические системы Морса-Смейла, топология несущего многообразия.

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$, заданный на гладком связном замкнутом многообразии M^n размерности n, называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит;

2) устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек и периодических орбит из Ω_f пересекаются трансверсально.

Термин "динамическая система Морса-Смейла" закрепился за системами, удовлетворяющими условиям 1)-2) после появления работы [8], в которой С. Смейл доказал, что для потоков, удовлетворяющих условиям 1)-2), справедливы неравенства Морса, устанавливающие взаимосвязь между структурой неблуждающего множества и числами Бетти несущего многообразия. В случае $n = 2$ класс потоков Морса-Смейла совпадает с классом грубых потоков. Диффеоморфизмы (потоки) Морса-Смейла на многообразиях размерности $n \geq 2$ ($n \geq 3$) являются грубыми, но не исчерпывают класс всех грубых диффеоморфизмов (потоков). Однако, изучение систем Морса-Смейла является важной задачей, как с точки зрения приложений, для описания процессов с конечным множеством стационарных режимов, так и с точки зрения теории бифуркаций, для понимания переходных процессов. Кроме того, системы Морса-Смейла обнаруживают глубокую взаимосвязь динамики с топологией фазового пространства, изучению которой посвящена эта статья.

Перечислим наиболее значимые результаты, полученные в этом направлении. В работе [10] получены аналоги неравенств Морса дл потоков Морса-Смейла без состояний равновесия. В [1] для таких потоков на многообразиях размерности $n \geq 4$ построено специальное разложение многообразия на круговые ручки и показано, что если многообразие допускает такое разложение, то на нем существует поток Морса-Смейла без состояний равновесия. Топологическая структура трехмерного многобразия, допускающего потоки Морса-Смейла без состояний равновесия исследована в работе [7], где показано,

[1]Старший преподаватель кафедры Теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; elena _ gurevich@list.ru.

что несущее многообразие представляет собой либо зейфертово недостаточно большое (в терминологии Вальдхаузена, см. [11]) пространство, либо специальное объединение зейфертовых пространств и многообразий, гомеоморфных прямому произведению тора на отрезок.

В работе [2] доказано, что трехмерное многообразие, допускающее диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, диффеоморфно либо сфере, либо связной сумме многообразий, гомеоморфных прямомому произведению $S^2 \times S^1$, и дана формула, связывающая число источниковых, седловых и стоковых точек с топологией несущего многообразия. В работе [6] аналогичная формула получены для n-мерной сферы, где $n \geq 4$. В [3] установлены соотношения между структурой периодических орбит систем Морса-Смейла (потоков и диффеоморфизмов) и родом Хегора несущего многообразия.

В настоящей работе рассматривается класс $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на трехмерном многообразии M^3 и таких, что множество неустойчивых сепаратрис любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Мы показываем, что из условий, определяющих класс $G(M^3)$, следует, что неблуждающее множество любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ содержит в точности 1 источник, и справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно сфере S^3. Если $k > 0$ — число седловых периодических точек диффеоморфизма f, то число стоковых точек равно $k+1$.*

Для $n > 3$ аналогичный результат доказан в [4]. Отметим, что техника доказательства теоремы 1.1. базируется на технике и некоторых ключевых результатах работы [2]. Однако, теорема 1.1. не является прямым следствием из работы [2], поскольку соотношение между числом стоковых и седловых точек для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ заранее неизвестно.

Благодарности Автор благодарит В.З. Гринеса, В.С. Медведева и О.В. Починку за плодотворные обсуждения, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант РФФИ № 11-01-12056 офи-м за частичную финансовую поддержку.

2. Топология несущего многообразия M^3

Будем называть n-шаром ($(n-1)$-сферой) многообразие, гомеоморфное стандарному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$ (сфере $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$), $n \in \{1, 2, 3\}$.

Обозначим через $\Omega_3(f)$, $\Omega_1(f)$ и $\Omega_0(f)$ множество источниковых, седловых и стоковых периодических точек диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ соответственно.

Нижеприведеное утверждение следует из [8].

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Для любой периодической точки $\sigma \in \Omega_1(f)$ диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ замыкание $\bar{l}$ $(\bar{\Sigma})$ неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы l (Σ) является компактной дугой (2-сферой), состоящей из объединения сепаратрисы l (Σ), точки σ и единственной точки $\omega \in \Omega_0(f)$ $(\alpha \in \Omega_3(f))$.*

Л е м м а 2.1. *Пусть $f \in G(M^3)$. Тогда неблуждающее множество $\Omega(f)$ содержит ровно один источник.*

Доказательство. Так как f — диффеоморфизм Морса-Смейла, то множество $\Omega_3(f)$ непусто. Предположим, что множество $\Omega_3(f)$ содержит более одной точки. В силу [9] (теорема 2.3) многообразие M^3 можно представить в виде объединения неустойчивых многообразий всех периодических точек диффеоморфизма f. Положим $X^u = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega_1(f)} W^u(\sigma)) \cup (\bigcup\limits_{\omega\in\Omega_0(f)} \omega)$. Тогда $M^3 = \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega_3(f)} W^u(\alpha) \cup X^u$. Для любых двух различных точек $\alpha_i, \alpha_j \in \Omega_3(f)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, множества $W^u(\alpha_i)$ и $W^u(\alpha_j)$ непусты, открыты и не пересекаются, следовательно множество $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega_3(f)} W^u(\alpha) = M^3 \setminus X^u$ несвязно. Так как, в силу предложения 2.1., множество X^u состоит из конечного числа простых дуг, то его топологическая размерность равна 1. Тогда в силу [5] (гл. 4, теорема 4) множество $M^3\setminus X^u$ связно. Полученное противоречие доказывает лемму.
Доказательство закончено.

Теорема 1.1. Для любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ несущее многообразие M^3 диффеоморфно сфере S^3. Если $k > 0$ — число седловых периодических точек диффеоморфизма f, то число стоковых точек равно $k+1$.

Доказательство. Не уменьшая общности предположим, что множество $\Omega(f)$ состоит только из неподвижных точек (если это не так, то существует такое $N > 0$, что любая периодическая точка диффеоморфизма f является неподвижной для диффеоморфизма f^N; тогда докажем теорему для f^N, многообразие M^3 при этом не изменится).

Для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f сфера $\Sigma = \overline{W^s(\sigma) \setminus \sigma}$ является топологическим репеллером, следовательно, существует окрестность $U(\sigma) \in M^3$ и целое положительное число $r(\sigma)$ такое, что $U(\sigma) \subset int\ f^{r(\sigma)}(U(\sigma))$. Положим что $r(\sigma) = 1$ для любого σ (в противном случае перейдем к некоторой степени диффеоморфизма f, при этом многообразие M^3 останется прежним).

Из работы [2] (Proposition 0.1) следует, что для каждой седловой точки σ диффеоморфизма f существует замкнутая окрестность $V(\sigma) \subset U(\sigma)$ сферы Σ, ограниченная гладко вложенными сферами S^2_1, S^2_2 и гомеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]$. Обозначим через l_1 и l_2 неустойчивые сепаратрисы точки σ, через ω_1 и ω_2 – стоковые точки, принадлежащие замыканиям l_1 и l_2 соответственно (возможно, $\omega_1 = \omega_2$). Из локальной сопряженности диффеоморфизма f с линейным отображением следует, что дуги $\bar{l}_1 \cap V(\sigma)$ и $\bar{l}_2 \cap V(\sigma)$ лежат в разных компонентах связности множества $V(\sigma) \setminus \Sigma$.

Удалим из многообразия M^3 внутренность окрестности $V(\sigma)$. Многообразие $M^3 \setminus int\ V(\sigma)$ является гладким компактным многообразием с краем, состоящим из сфер S^2_1, S^2_2. Обозначим через M^3_1 компактное многообразие без края, полученное из многообразия $M^3 \setminus int\ V(\sigma)$ приклеиванием вдоль его края двух замкнутых шаров B^3_1 и B^3_2. Зададим диффеоморфизм $\widetilde{f}_1 : M^3_1 \to M^3_1$ таким образом, что:

1) $\widetilde{f}_1|_{M^3_1\setminus(B^3_1\cup B^3_2)} = \widetilde{f}|_{M^3_1\setminus(B^3_1\cup B^3_2)}$;

2) $\widetilde{f}_1|_{B^3_1\cup B^3_2}$ имеет только две неподвижные точки $\alpha_1 \in B^3_1$, $\alpha_2 \in B^3_2$, каждая из которых является отталкивающей.

Неблуждающее множество $\Omega(\widetilde{f}_1)$ диффеоморфизма $\widetilde{f}_1$ содержит в точности две отталкивающие точки и $(k-1)$ седловых точек, при этом общее количество неподвижных точек точек диффеоморфизма $\widetilde{f}_1$ совпадает с числом неподвижных точек диффеоморфизма f.

Так как неблуждающее множество $\Omega(\widetilde{f}_1)$ содержит два источника, то из леммы 2.1. следует, что многообразие M^3_1 состоит из двух компонент связности N^3_1 и N^3_2. Так как $\bar{l}_i \setminus U_\sigma \subset N^3_i$, то $\omega_i \subset N^3_i$, $i = 1, 2$.

Проделаем описанную процедуру еще $(k-1)$ раз. В результате получим компактное многообразие без края M^3_k и диффеоморфизм $\widetilde{f}_k : M^3_k \to M^3_k$ со следующими свойствами.

Многообразие M_k^3 состоит из $k+1$ компонент связности $N_1^3, ..., N_{k+1}^3$, каждая из которых содержит 1 источник и 1 сток диффеоморфизма $\widetilde{f}_k$. Следовательно, каждое многообразие N_i^3 гомеоморфно 3-сфере, а многообразие M^3 является связной суммой $(k+1)$ экземпляров 3-сфер[2]. Поэтому M^3 гомеоморфно $3-$ сфере.

Неблуждающее множество диффеоморфизма $\widetilde{f}_k$ содержит только притягивающие и отталкивающие неподвижные точки, и их общее количество равно числу неподвижных точек диффеоморфизма f. Следовательно, неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит $2k+2$ точки: 1 источник, k седловых точек и $k+1$ стоков.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Asimov D. Round handles and non-singular Morse-Smale flows// Ann. of Math. (2) – 1975. – V.102. – P. 41-54.

2. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorfisms without heteroclinic curves// Topology and its Applications. – 2002. – V. 111. – P. 335-344.

3. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами// Мат. сб. – 2003. – Т. 194, № 7. – С. 25–56.

4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех// Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 61-86.

5. Гуревич В., Волмэн Г., Теория размерности (пер. с англ.). – М.: Издательство иностранной литературы, 1948. – 232 с.

6. Гуревич Е.Я. О диффеоморфизмах Морса-Смейла на многообразиях размерности большей 3// Труды Средневолжского математического общества. – 2003. – Т.1. – С. 162-167.

7. Morgan J. W. Non-singular Morse-Smale flows on 3-manifold// Topology. – 1979. – V. 18, №1. – P. 41-53.

8. Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems// Bull. Am. math. Soc. – 1960. – V. 66. – P. 43-49. [Русский перевод: сб. Математика. – 1967. – Т. 11, №4. – С. 79-87.]

9. Smale S. Differentiable dynamical systems.// Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – № 6. – P. 747-817 (Пер. на рус. яз.: Смейл С. Дифференцируемые динамические системы.// Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – № 1. – С. 113-185.)

10. Franks J. The period structure of non-singular Morse-Smale flows// Comment. Math. Helv. – 1978. – V.53. – P. 279-294.

[2]Связной суммой $M_1^3 \sharp M_2^3$ двух ориентируемых связных 3-многообразий M_1^3, M_2^3 называется многообразие $M_1^3 \sharp M_2^3$, полученное следующим образом:

1) выберем шары B_1^3, B_2^3 так, что $B_i^3 \subset M_i^3$; 2) склеим многообразия $M_1^3 \setminus intB_1^3$ и $M_2^3 \setminus intB_2^3$ при помощи гомеоморфизма $\varphi : \partial B_1^3 \to \partial B_2^3$, обращающего естественную ориентацию $\partial B_1^3, \partial B_2^3$.

11. Waldhausen F. Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeinten I// Invent. Math. – 1967. – V. 3. – P. 308-333.

On topology of ambient manifold for Morse-Smale diffeomorphisms.

© **E.Y. Gurevich**[3]

Abstract. In this article is considered the class $G(M^3)$ of orientation preserving Morse-Smale diffeomorphisms on connected closed orientable 3-manifolds such that for any $f \in G(M^3)$ the set of unstable separatrices is one-dimensional and does not contain any heteroclinic intersection. It is proved that for any $f \in G(M^3)$ its' ambient manifold M^3 is diffeomorphic to 3-sphere.

Key Words: Morse-Smale dynamical systems, topology of the ambient manifold.

[3]Assistant Professor of Chair of Theory of Control and Dynamic of Machines, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; elena _ gurevich@list.ru.