В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.97, 519.6

Численное решение задачи оптимального управления с использованием системы распределенных вычислений

© **Ю. А. Гнатенко**[1], **М. Т. Карамуллин**[2]

Аннотация. В работе получено численное решение задачи Майера с помощью системы распределенных вычислений.

Ключевые слова: задача оптимального управления, принцип максимума Понтрягина, двухточечная краевая задача, система распределенных вычислений.

Основной характерной чертой, присущей всем прикладным задачам оптимального управления, является сложность решения двухточечной краевой задачи, к которой приводит принцип максимума Понтрягина [3]. В большинстве случаев при численном поиске оптимального решения затрачивается много вычислительных ресурсов и, соответственно, времени. Поэтому для ускорения поиска оптимального решения предлагается использовать системы распределенных вычислений, которые способны в несколько раз сократить время, затрачиваемое на поиск.

Систему распределенных вычислений было решено сделать по принципу «управляющий – командный центр — клиенты», где «управляющий» – это рабочая станция, отдающая задания клиентам через «командный центр»; «клиенты» – компьютеры с необходимым программным обеспечением, способные принимать задания от управляющих рабочих станций посредством командного центра, обрабатывать их и возвращать результат. В качестве командного центра используется IRC-сервер [1].

Рассмотрим численное решение задачи оптимального управления на следующем примере.

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) + u(t), \quad |u(t)| \le 1; \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \tag{1.2}$$

а также функционал качества

$$I = x_2(2\pi) \to \min . \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, t \in [0; 2\pi]$.

[1] Доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия им.Зайнаб Биишевой, г. Стерлитамак; valieva_julia@mail.ru.

[2] Студент пятого курса института математики и естественных наук, Стерлитамакская государственная педагогическая академия им.Зайнаб Биишевой, г. Стерлитамак; frostosx@gmail.com.

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t)$ и соответствующую ему оптимальную траекторию $\mathbf{x}^*(t)$. Задача (1.1)-(1.3) – задача Майера.

Применим принцип максимума Понтрягина. Составим функцию Понтрягина (гамильтониан)

$$H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = \psi_1 x_2 + \psi_2[-x_1 + u]. \tag{1.4}$$

Найдем максимум функции Понтрягина. Так как гамильтониан (1.4) линеен по управлению u, а на управление наложены ограничения $|u(t)| \leq 1$, то оптимальное управление имеет вид

$$u^*(t) = \arg\max H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u) = 1 \cdot sign(\psi_2(t)), \tag{1.5}$$

то есть управление является релейным и определяется знаком функции $\psi_2(t)$.

С учетом (1.5) система основных уравнений (1.1) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) + 1 \cdot sign(\psi_2(t)). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Выпишем сопряженные уравнения принципа максимума:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u)) = \psi_2(t), \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, \boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, u)) = -\psi_1(t). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Недостаток граничных условий восполняется условиями трансверсальности, число которых равняется числу недостающих граничных условий для основной и сопряженной системы уравнений (для задачи со свободным правым концом).

$$\psi_1(2\pi) = 0, \quad \psi_2(2\pi) = -1. \tag{1.8}$$

Таким образом, получена следующая двухточечная краевая задача: найти решение канонической системы (1.6), (1.7) с краевыми условиями (1.2), (1.8).

Для численного решения полученной задачи требуется задать начальные значения всех неизвестных функций $x_i(t)$ и $\psi_i(t), i = 1, 2$, а далее численно решать задачу Коши. Недостающие значения

$$\psi_i(0) = \psi_i^{(0)}, i = 1, 2 \tag{1.9}$$

должны задаваться до некоторой степени произвольно и затем уточняться по значениям функций $\psi_i(t)$ в конечной точке траектории (1.8). Оценка несоответствия (невязка) найденной конечной точки $\boldsymbol{\psi}^{(k)}$ с заданной определяется по формуле [2]:

$$r = \sum_{i=1}^{2} \left[\psi_i(2\pi) - \psi_i^{(k)}\right]^2.$$

При этом важно оценить, насколько удачно выбраны начальные значения (1.9), то есть решить задачу отыскания минимума функции нескольких переменных:

$$\min_{\boldsymbol{\psi}^{(0)}} r(\boldsymbol{\psi}^{(0)}) = 0. \tag{1.10}$$

Задача (1.10) была решена численно с помощью градиентного метода безусловной минимизации функции многих переменных, задача Коши для систем дифференциальных уравнений (1.1), (1.7) с начальными условиями (1.9) – классическим методом Рунге-Кутта. В таблице представлены результаты численного решения – приближенное минимальное значение функционала (1.3) при различных $\psi_i^{(0)}, i = 1, 2$.

N	Начальные приближения	Время счета, ч:мин:с	Невязка	Минимум ф-ла
1	$\psi_1^{(0)} = 0 \quad \psi_2^{(0)} = -1$	00:00:03	0,01956	-3,9919428
2	$\psi_1^{(0)} = 0,023 \quad \psi_2^{(0)} = -0,989$	00:00:16	0,025735	-3,9919418
3	$\psi_1^{(0)} = 0,0456 \quad \psi_2^{(0)} = -0,7856$	00:21:16	0,048467	-3,9845698
4	$\psi_1^{(0)} = 1 \quad \psi_2^{(0)} = 1$	48:58:27	1	-3,8788281

Анализируя результаты, можно сделать вывод: чем дальше начальные приближения, задаваемые произвольно, от аналитических [3], равных $\psi_1^{(0)} = 0$, $\psi_2^{(0)} = -1$, тем дольше время поиска решения. Аналитическое значение минимума функционала (1.3): $I = -4$.

Для того, чтобы ускорить процесс, предлагается применить систему распределенных вычислений следующим образом: управляющая станция генерирует систему двумерных случайных точек для задания начальных значений $\psi_i^{(0)}, i = 1, 2$; каждый клиент получает одну из случайных точек и начинает независимо от других клиентов решать задачу (1.10). Как только первый из клиентов находит решение задачи (1.10), работа остальных клиентов завершается. Ускорение достигается за счет того, что один из клиентов выбирает случайную точку наиболее «близкую» к искомому решению.

Было разработано программное средство, реализующее данный алгоритм. Случайные точки задавались из промежутка $[0; 10000] \times [0; 10000]$. Зависимость времени счета задачи от количества клиентов представлена в таблице.

число клиентов	время, с
1	3,5
2	2,3
3	1,7

Таким образом, с увеличением числа клиентов время счета уменьшается, при этом численное решение краевой задачи (1.6), (1.7), (1.2), (1.8) согласуется с аналитическим [3].

Список литературы

1. Андрианов С.Н., Дегтярев А.Б. Параллельные и распределнные вычисления. Часть 1: Учеб. пособие - СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 61с.

2. Бояринов А.И., Кафаров В.В.Методы оптимизации в химической технологии - М: Химия, 1975, 576 с.

3. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С.- М: Высш. шк., 2003.-583с.:ил.

Numerical solution of the optimal management system using distributed computing

© Y. A. Gnatenko[3], M. T. Karamullin[4]

Abstract. In the work the solution of the Maier's problem is obtained with the help of the distributed computing systems.

Key Words: problem of optimal control, Pontryagin's principle of maximum, two points boundary problem, system of distributed computing.

[3]Associate Professor of Department Mathematical Modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy after Zaynab Biishevoy, Sterlitamak; valieva_julia@mail.ru.

[4]Fifth student degree in mathematics and science, Sterlitamak State Pedagogical Academy after Zaynab Biishevoy, Sterlitamak; frostosx@gmail.com.