УДК 517.96:519.64

Численный метод решения начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля

© Н. С. Яшагин[1]

Аннотация. В работе получены формулы численного интегрирования для некоторых интегральных операторов с ядром Абеля и априорные оценки погрешности для них. Разработана итерационная процедура вычисления решений начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля и доказана её сходимость.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля, интегральные уравнения Вольтéрры второго рода, метод квадратур.

1. Постановка задачи

В работе [1] рассмотрено дифференциальное уравнение

$$\ddot{u}(t)+\sum_{k=1}^{n}a_kD_{0t}^{\alpha_k}\dot{u}+\sum_{k=0}^{m}b_kD_{0t}^{\beta_k}u=f(t), \tag{1.1}$$

где $u=u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, $\dot{u}=\frac{du}{dt}$, $\ddot{u}=\frac{d^2u}{dt^2}$, $t\in[0,T]$; a_k, $b_k\in\mathbb{R}$, $\alpha_k\in(0,1)$, $\beta_k\in[0,2)$; $D_{0t}^{\alpha_k}$, $D_{0t}^{\beta_k}$ — левосторонние дробные производные Римана—Лиувилля [2] порядка α_k и β_k соответственно, определяемые равенством

$$D_{0t}^{\alpha}f=\left(\frac{d}{dx}\right)^nI_{0t}^{n-\alpha}f,\quad n=[\alpha]+1,$$

для любых $\alpha>0$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α, а

$$I_{0t}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{f(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}},\quad \alpha>0, \tag{1.2}$$

— левосторонний дробный интеграл Римана—Лиувилля [2] порядка α. Уравнение (1.1) можно рассматривать как модельное уравнение дробных осцилляторов (см. [3, 4] и библиографию к [3, 4]). Основное внимание уделено двум частным случаям (1.1):

$$\ddot{u}(t)+pD_{0t}^{\beta}\dot{u}+qD_{0t}^{2\beta}u=f(t), \tag{1.3}$$

$$\ddot{u}(t)+pD_{0t}^{1+\beta}u+qD_{0t}^{2\beta}u=f(t), \tag{1.4}$$

где p, $q\in\mathbb{R}$, $\beta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f(t)\in L(0,T)$, для которых формулируются принципиально разные постановки начальных задач:

- для (1.3)

$$u(0)=u_0,\quad \dot{u}(0)=\dot{u}_0; \tag{1.5}$$

[1]Аспирант кафедры «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет, г. Самара; nik.yashagin@gmail.com.

- для (1.4)

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+}\left[\dot u(t) + pD_{0t}^{\beta}u\right] = \bar u_0. \tag{1.6}$$

В [1] доказана корректность этих постановок в классах функций $u(t) \in C^1[0,T]\bigcap C^2(0,T]$ и $u(t) \in C[0,T]\bigcap C^2(0,T]$ соответственно, предъявлены аналитические решения, полученные путём факторизации интегральных уравнений, к которым редуцируются соответствующие начальные задачи.

В данной работе будем рассматривать дифференциальные уравнения более общего вида:

$$\ddot u(t) + pD_{0t}^{\alpha}\dot u + qD_{0t}^{\beta}u = f(t), \tag{1.7}$$

$$\ddot u(t) + pD_{0t}^{1+\alpha}u + qD_{0t}^{\beta}u = f(t), \tag{1.8}$$

где α, $\beta \in [0,1)$. После двукратного интегрирования с учётом начальных данных (1.5) и (1.6) соответственно, эти уравнения редуцируются эквивалентным образом к интегральным уравнениям типа Вольтéрры

$$u(t) + pI_{0t}^{1-\alpha}u + qI_{0t}^{2-\beta}u = F(t), \tag{1.9}$$

где для задачи (1.7), (1.5) $F(t) = I_{0t}^2 f + u_0 + \dot u_0 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}pu_0t^{\alpha}$, а для задачи (1.8), (1.6) — $F(t) = I_{0t}^2 f + u_0 + \bar u_0 t$.

Если для уравнения (1.9) выполняются условия $\beta = 2\alpha$, то оно допускает факторизацию и на основе аппарата предложенного в [1] выписываются аналитические решения начальных задач в терминах функции типа Миттаг—Леффлера и её обобщений. Вычисления базируются на использовании интегральных представлений и асимптотических формул разработанных в [5-7]. В противном случае предлагается применять приближённые методы решения интегрального уравнения, например, метода квадратур, основанный на замене входящих в левую часть уравнения интегралов формулами численного интегрирования. Однако при использовании известных подходов для решения (1.9) возникают проблемы, связанные с сингулярностью ядер интегральных операторов. Чтобы избежать этих трудностей, предлагается определить аналоги формул численного интегрирования для интегрального оператора (1.2).

Также необходимо получить формулы численного интегрирования для интегрального оператора, введённого в [8],

$$E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\sigma}\left[\lambda(t-\tau)^{\sigma};\alpha\right]u(\tau)\,d\tau, \tag{1.10}$$

где α, β, $\lambda \in \mathbb{C}$; $\mathrm{Re}\alpha$, $\mathrm{Re}\beta > 0$, $u(t) \in L(0,T)$, а $\mathrm{E}_{\alpha}(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)}$ — функция типа Миттаг—Леффлера [5], в терминах которого обычно удаётся выписывать аналитические решения интегральных уравнений типа (1.9). Оператор (1.10) будет использован в данной работе при построение сходящейся итерационной процедуры вычисления приближённого решения данного интегрального уравнения.

Таким образом, в работе поставлены следующие задачи:

1. Разработать формулы численного интегрирования для интегральных операторов дробного порядка, а также априорные оценки погрешности приближённого вычисления с помощью этих формул.

2. Построить итерационную процедуру вычисления решений интегрального уравнения (1.9), доказать её сходимость и провести оценку погрешности.

2. Формулы численного интегрирования и априорные оценки погрешности вычислений

В настоящее время хорошо разработан математический аппарата и формализован алгоритм приближённого вычисления «классических» интегралов [9], основанный на замене подынтегральной функции такой аппроксимирующей функцией, чтобы интеграл от неё вычислялся в элементарных функциях достаточно просто. Один из способов вычисления интеграла заключается в разбиении отрезка интегрирования на n частичных отрезков и аппроксимации подынтегральной функции на каждом из этих отрезков $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) её разложением в ряд Тейлора в окрестности точек t_k. Вычисление интеграла при этом практически не вызывает затруднений, а его значение выражается через значения подынтегральной функции в узлах t_k. В зависимости от количества членов ряда Тейлора, взятого для аппроксимации подынтегральной функции, получаются формулы известные под названиями: «формула прямоугольников», «формула трапеций» и «формула Симпсона», а также их модификации.

Построим аналогичные формулы для интегрального оператора I^{α}_{0t}. Пусть $\alpha > 0$. Для фиксированного $t \in [0, T]$ выберем разбиение отрезка $[0, t]$ на n равных частей, длина которых $h = \frac{t}{n}$, т.е. $t_k = kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$), в частности $t_0 = 0$, $t_n = t$. Представим дробный интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[t_k, t_{k+1}]$, а подынтегральную функцию в виде ряда Тейлора, при этом ограничиваясь двумя членами разложения

$$I^{\alpha}_{0t}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(\tau)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{u(t_k) + \dot{u}(\xi_k)(\tau - t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{(t_i-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \dot{u}(\xi_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k)\left[(t_n - t_k)^{\alpha} - (t_n - t_{k+1})^{\alpha}\right] + R(h) =$$

$$= \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k)\left[(n-k)^{\alpha} - (n-k-1)^{\alpha}\right] + R(h),$$

где $\xi_k \in (t_k, t_{k+1})$, $u(t) \in C[0,T] \bigcap C^1(0,T)$, а $R(h)$ — остаток, для которого выполняется следующая оценка

$$|R(h)| = \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \dot{u}(\xi_k) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} \right| \leq \frac{h\,|\dot{u}(\xi)|}{\Gamma(\alpha)} \left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| \leq \frac{ht^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\,|\dot{u}(\xi)|\,,$$

где $\xi \in (0, t)$. Исходя из этого аналог первой (левой) формулы прямоугольников для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ имеет вид

$$\overset{(1)}{\underset{\text{пр}}{}} I^{\alpha}_{0t}u = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u_k\left[(n-k)^{\alpha} - (n-k-1)^{\alpha}\right] + o(h), \tag{2.1}$$

где $u_k = u(t_k)$, а априорная оценка погрешности для вычисления дробного интеграла по формуле (2.1) выглядит следующим образом:

$$\left|I_{0t}^{\alpha}u - {}_{\text{пр}}^{(1)}I_{0t}^{\alpha}u\right| \leq \frac{Mht^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{2.2}$$

где M — константа независящая от h, в частности $M = \max\limits_{\xi\in[0,t]}|\dot{u}(\xi)|$ при $u(t)\in C^1[0,T]$.

Действуя таким же образом, легко получить аналог второй (правой) формулы прямоугольников для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ и априорную оценку погрешности для приближённого вычисления значения интеграла по ней

$${}_{\text{пр}}^{(2)}I_{0t}^{\alpha}u = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}\left[(n-k)^{\alpha}-(n-k-1)^{\alpha}\right]+o(h), \tag{2.3}$$

$$\left|I_{0t}^{\alpha} - {}_{\text{пр}}^{(2)}I_{0t}^{\alpha}\right| \leq \frac{hMt^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.4}$$

Для получения аналога формулы трапеций для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ возьмём три члена ряда Тейлора в разложении подынтегральной функции. Заменяя производную выражением $\dot{u}(t_k) = \frac{1}{h}\left[u(t_{k+1}) - u(t_k)\right] - \frac{h}{2}\ddot{u}(\xi_{k1})$ ($\xi_{k1}\in(t_k,t_{k+1})$), имеем

$$I_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{u(\tau)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}u(t_k)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u(t_{k+1})-u(t_k)}{h}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} -$$

$$-\frac{h}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\dot{u}(\xi_{k1})\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{u}(\xi_{k2})\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_k)^2\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n-1}u(t_k)\left[(n-k)^{\alpha}-(n-k-1)^{\alpha}\right] +$$

$$+h^{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\left[u(t_{k+1})-u(t_k)\right]\left\{\frac{(n-k)^{\alpha+1}-(n-k-1)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} - \frac{(n-k-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right\} + R(h) =$$

$$= \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}u(t_0)\left[(1+\alpha)n^{\alpha} - n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}\right] +$$

$$+\frac{h^{\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}\sum_{k=1}^{n-1}u(t_k)\left[(n-k+1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1}\right] + u(t_n) + R(h),$$

где $\xi_{k2}\in(t_k,t_{k+1})$, $u(t)\in C^1[0,T]\bigcap C^2(0,T)$. Оценим остаток $R(h)$

$$|R(h)| = \left|-\frac{h}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{u}(\xi_{k1})\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_k)\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} + \frac{1}{2\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\ddot{u}(\xi_{k2})\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{(\tau-t_k)^2\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{h^2 \left|\ddot{u}(\xi)\right|}{\Gamma(\alpha)} \left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \right| = \frac{h^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left|\ddot{u}(\xi)\right|,$$

где $\xi \in (0,t)$. Итак, аналог формулы трапеций для дробного интеграла порядка $\alpha > 0$ может быть записан в виде

$$_{\text{трп}}I_{0t}^{\alpha}u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \omega_k u_k + o(h^2), \tag{2.5}$$

где

$$\omega_k = \begin{cases} (1+\alpha)n^\alpha - n^{\alpha+1} + (n-1)^{\alpha+1}, & k=0; \\ (n-k+1)^{\alpha+1} - 2(n-k)^{\alpha+1} + (n-k-1)^{\alpha+1}, & k=1,2,\ldots,n-1; \\ 1, & k=n. \end{cases}$$

что соответствует результату, опубликованному в работе [10], или в виде удобном нам для дальнейшего использования

$$_{\text{трп}}I_{0t}^{\alpha}u = \frac{h^\alpha}{\Gamma(2+\alpha)} \Bigg\{ u_0 \left[(1+\alpha)i^\alpha - i^{\alpha+1} + (i+1)^{\alpha+1}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{i-1} u_k \left[(i-k+1)^{\alpha+1} - 2(i-k)^{\alpha+1} + (i-k-1)^{\alpha+1}\right] + u_i \Bigg\} + o(h^2). \tag{2.6}$$

Получена также априорная оценка погрешности, которая выглядит следующим образом:

$$\left|I_{0t}^{\alpha}u - {}_{\text{трп}}I_{0t}^{\alpha}u\right| \leq \frac{h^2 M t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{2.7}$$

где M — константа независящая от h, в частности $M = \max\limits_{\xi\in[0,t]} \left|\ddot{u}(\xi)\right|$ при $u(t) \in C^2[0,T]$.

Увеличение числа членов в тейлоровском разложении подынтегральной функции ведёт к дальнейшему повышению точности вычислений, с одной стороны, и к увеличению количества вычислений подынтегральной функции и коэффициентов квадратурной формулы, с другой. Это объясняется как возрастанием порядка производных, которые при формировании формул численного интегрирования выражаются через значения функции в узловых точках, так и сложностями связанными с дробным порядком интегрирования. Например, столь простой формулы Симпсона как для интегрального оператора порядка единица («классического» интеграла) получить не удаётся. Это связано с тем, что для разложения функции $u(t)$ в ряд Тейлора, при разбиении отрезка $[0,t]$ на $i = 2j$ частей равной длины $h = \frac{t}{i}$

$$u(t) = u(t_{2k+1}) + \dot{u}(t_{2k+1})(t - t_{2k+1}) + \frac{\ddot{u}(t_{2k+1})(t-t_{2k+1})^2}{2!} +$$

$$+ \frac{\dddot{u}(t_{2k+1})(t-t_{2k+1})^3}{3!} + \frac{\ddddot{u}(\xi_k)(t-t_{2k+1})^4}{4!}$$

коэффициенты при первой и третьей производных от $u(t)$ не обнуляются при интегрировании

$$\int\limits_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} \frac{(\tau - t_{2k+1})\,d\tau}{(t_n-\tau)^{1-\alpha}} \neq 0,$$

в отличии от построения формулы Симпсона для «классического» интеграла

$$\int\limits_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} (\tau - t_{2k+1})\, d\tau = \left. \frac{(\tau - t_{2k+1})^2}{2} \right|_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} = 0.$$

С другой стороны, целью данной работы является поиск решения интегрального уравнения в классах $C^1[0,T] \bigcap C^2(0,T)$ и $C[0,T] \bigcap C^2(0,T)$, определяемых постановками начальных задач (1.7), (1.5) и (1.8), (1.6). В связи с этим аналоги формул прямоугольников и трапеций являются исчерпывающими для нас.

К тому же, как показывает практика, уже формула трапеций даёт достаточно хороший результат, поэтому ограничимся полученными формулами численного интегрирования (2.1), (2.3) и (2.5).

Воспользовавшись определениями оператора $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ и функции типа Миттаг—Леффлера, нетрудно получить аналоги первой и второй формул прямоугольников, а также аналог формулы трапеций для этого оператора:
1) аналог первой формулы прямоугольников и оценка погрешности для вычисления значения оператора, применённого к функции, по ней:

$$\begin{aligned} {}_{\text{пр}}^{(1)}E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u = \sum_{k=0}^{n-1} u(t_k) h^\alpha \left\{ (n-k)^\alpha \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda (n-k)^\sigma h^\sigma; \alpha+1 \right] - \right. \\ \left. -(n-k-1)^\alpha \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda (n-k-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+1 \right] \right\} + o(h), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\left| E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u - {}_{\text{пр}}^{(1)}E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u \right| \leq h t_n^\alpha \mathrm{E}_\sigma (\lambda t_n^\sigma; \alpha+1) \max_{\xi \in [0,t]} |\dot{u}(\xi)|\,; \tag{2.9}$$

2) аналог формулы трапеций и оценка погрешности:

$$\begin{aligned} {}_{\text{трп}}E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u = u_0 h^\alpha \left\{ n^\alpha \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda n^\sigma h^\sigma; \alpha+1 \right] - n^{\alpha+1} \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda n^\sigma h^\sigma; \alpha+2 \right] + \right. \\ \left. +(n-1)^{\alpha+1} \mathrm{E}_\sigma \left[\lambda (n-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2 \right] \right\} + \sum_{k=1}^{n-1} u(t_k) h^\alpha \left\{ (n-k+1)^{\alpha+1} \mathrm{E}\sigma \left[\lambda (n-k+1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2 \right] - \right. \\ -2(n-k)^{\alpha+1} h^\alpha \mathrm{E}\sigma \left[\lambda (n-k)^\sigma h^\sigma; \alpha+2 \right] + \left. (n-k-1)^{\alpha+1} \mathrm{E}\sigma \left[\lambda (n-k-1)^\sigma h^\sigma; \alpha+2 \right] \right\} + \\ + u_n h^\alpha \mathrm{E}\sigma \left[\lambda h^\sigma; \alpha+2 \right] + o(h^2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\left| E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u - {}_{\text{трп}}E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}u \right| \leq h^2 t_n^\alpha \mathrm{E}\sigma \left[\lambda t_n^\sigma; \alpha+1 \right] \max_{\xi \in [0,t]} |\dot{u}(\xi)|\,. \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. *Полученные аналоги формул численного интегрирования* (2.8) *и* (2.10) *для оператора* $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ *и априорные оценки погрешностей этих формул* (2.9) *и* (2.11) *в предельном случае (при* $\lambda \to 0$*) переходят соответственно в формулы численного интегрирования для интегрального оператора Римана—Лиувилля* (2.1) *и* (2.6) *и оценки погрешностей для них* (2.2) *и* (2.7).

Замечание 2.2. *При устремлении показателя* α *(показателя дробности) к единице в аналогах формул численного интегрирования для дробного интеграла* (2.1), (2.3) *и* (2.6) *получаются формулы численного интегрирования для «классического» интеграла: «первая формула прямоугольников», «вторая формула прямоугольников» и «формула трапеций» соответственно. При* $\alpha \to 0$ *в априорных оценках погрешностей* (2.2), (2.4) *и* (2.7) *приближённых вычислений по формулам* (2.1), (2.3) *и* (2.6) *получаются оценки для классических формул.*

3. Итерационная процедура вычисления решений интегрального уравнения. Оценка погрешности и сходимость

Рассматривается приближённый метод решения интегрального уравнения (1.9), основанный на замене входящих в уравнение интегральных операторов квадратурными формулами, в частности, формулами численного интегрирования. Пусть на конечном отрезке $[0,T]$ имеется разбиение $t_i = ih$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) с шагом $h = \frac{T}{n}$. Точные значения функций $u(t)$ и $F(t)$ в узловых точках $t = t_i$ обозначим за u_i и F_i соответственно, приближённые значение функции $u(t)$ за $\tilde{u}_i$. Положим $t = t_i$ в интегральном уравнении (1.9), в результате чего получим систему равенств

$$u_0 = F_0, \tag{3.1}$$

$$u_i + pI_{0t_i}^{1-\alpha} u + qI_{0t_i}^{2-\beta} u = F_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Воспользуемся квадратурными формулами в следующем виде

$$I_{0t_i}^{\alpha} u = h^{\alpha} \sum_{k=0}^{i} c_{ik}^{(\alpha)} u_k + R_i^{(\alpha)}(h), \tag{3.3}$$

где $c_{ik}^{(\alpha)}$ — коэффициенты квадратурной формулы для дробного интеграла порядка α в точке $t = t_i$ не зависящие от h, $R_i^{(\alpha)}(h)$ — погрешность приближённого вычисления дробного интеграла порядка α в точке $t = t_i$. Как видно, частными случаями (3.3) являются формулы (2.1) и (2.5). Заменим в каждом равенстве (3.2) дробные интегралы квадратурными формулами (3.3), при этом выразив u_i в явном виде

$$u_i = \frac{F_i - ph^{1-\alpha} \sum\limits_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} u_k - pR_i^{(1-\alpha)}(h) - qh^{2-\beta} \sum\limits_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} u_k - qR_i^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)}} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.4}$$

где u_0 определяется из (3.1). Ясно, что необходимо требовать в (3.4) выполнение следующего условия

$$1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} \neq 0.$$

Для малых h это означает, что

$$\left| -ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} - qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)} \right| < 1,$$

или

$$\left| ph^{1-\alpha} c_{ii}^{1-\alpha} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{2-\beta} \right| \leq C_h < 1.$$

В виду того, что точно может быть вычислено только значение u_0, (3.4) переписывается в виде

$$u_i = \frac{1}{1 + ph^{1-\alpha} c_{ii}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta} c_{ii}^{(2-\beta)}} \left[F_i - ph^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} \tilde{u}_k - pR_i^{(1-\alpha)}(h) - \right.$$

$$\left. - ph^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^{(1-\alpha)} R_k - qh^{2-\beta} \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} \tilde{u}_k - qh^{2-\beta} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} R_k - qR_i^{(2-\beta)}(h) \right],$$

где R_k — полная погрешность вычисления значения $u(t)$ в точке $t = t_k$. В результате получаем систему из i равенств для вычисления приближённого решения в точке $t = t_i$

$$\tilde{u}_j = \frac{F_j - ph^{1-\alpha}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(1-\alpha)}\tilde{u}_k - qh^{2-\beta}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(2-\beta)}\tilde{u}_k}{1 + ph^{1-\alpha}c_{jj}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta}c_{jj}^{(2-\beta)}}, \quad (j = 1, 2, \ldots, i) \tag{3.5}$$

а также систему равенств для погрешностей

$$R_1 = \frac{-pR_1^{(1-\alpha)}(h) - qR_1^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha}c_{11}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta}c_{11}^{(2-\beta)}},$$

$$R_j = \frac{-h^{1-\alpha}\sum\limits_{k=1}^{j-1}\left[pc_{jk}^{(1-\alpha)} + qh^{1+\alpha-\beta}c_{jk}^{(2-\beta)}\right]R_k - pR_j^{(1-\alpha)}(h) - qR_j^{(2-\beta)}(h)}{1 + ph^{1-\alpha}c_{jj}^{(1-\alpha)} + qh^{2-\beta}c_{jj}^{(2-\beta)}} \, (j = 2, 3, \ldots, i).$$

Оценим погрешность метода с обеих сторон, с учётом малости h и следующих обозначений

$$\max_{\substack{j,k\\ j\neq k}}\left\{\left|c_{jk}^{(1-\alpha)}\right|, \left|c_{jk}^{(2-\beta)}\right|\right\} = C_{\max}, \quad \min_{\substack{j,k\\ j\neq k}}\left\{\left|c_{jk}^{(1-\alpha)}\right|, \left|c_{jk}^{(2-\beta)}\right|\right\} = C_{\min},$$

$$\max_{k=1,2,\ldots,i}\left\{\left|R_k^{(1-\alpha)}(h)\right|, \left|R_k^{(2-\beta)}(h)\right|\right\} = h^s R_{\max}, \quad \min_{k=1,2,\ldots,i}\left\{\left|R_k^{(1-\alpha)}(h)\right|, \left|R_k^{(2-\beta)}(h)\right|\right\} = h^s R_{\min},$$

где s — порядок точности метода численного интегрирования (для аналога формулы прямоугольников $s = 1$, трапеций $s = 2$). Причём будем брать $C_{\min} > 0$, чему вполне удовлетворяют используемые нами формулы численного интегрирования (2.1), (2.3) и (2.5). А также $R_{\min} > 0$ — это означает, что мы не будем брать «простых» решений: $u(t) = c$ или $u(t) = kt + c$, где k и c — константы. Теперь запишем систему двойных неравенств для погрешностей

$$(|p| + |q|)\, h^s R_{\min} \le |R_1| \le \frac{(|p| + |q|)\, h^s R_{\max}}{1 - C_h};$$

$$h^{1-\alpha}C_{\min}|p|\sum_{k=1}^{j-1}|R_k| + (|p| + |q|)\, h^s R_{\min} \le |R_j| \le \frac{h^{1-\alpha}C_{\max}(|p| + |q|)\sum\limits_{k=1}^{j-1}|R_k| + (|p| + |q|)\, h^s R_{\max}}{1 - C_h}$$
$$(j = 2, 3, \ldots, i).$$

Ясно, что необходимым условием сходимости приближённого решения интегрального уравнения к точному является равенство нулю предела

$$\lim_{h\to 0} h^{1-\alpha}C_{\min}|p|\sum_{k=1}^{j-1}|R_k| + (|p| + |q|)\, h^s R_{\min} = 0.$$

Для вычисления предела рассмотрим следующий набор величин

$$\mathrm{R}_1 = (|p| + |q|)\, h^s R_{\min},$$

$$\mathrm{R}_j = h^{1-\alpha}C_{\min}|p|\sum_{k=1}^{j-1}\mathrm{R}_k + (|p| + |q|)\, h^s R_{\min}, \quad (j = 2, 3, \ldots, i)$$

которые минорируют соответствующие оценки погрешностей, т.е. $\mathrm{R}_j \le |R_j|$. Легко видеть, что каждое R_j $(j = 2, 3, \ldots, i)$ может быть выражено через R_1 по формуле

$$\mathrm{R}_j = \mathrm{R}_1 \left(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|\right)^{j-1},$$

или

$$\mathrm{R}_j = (|p| + |q|)\, h^s R_{\min} \left(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|\right)^{j-1}.$$

Найдём предел от полученного выражения учитывая, что $j = \frac{t}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{R}_j = \lim_{h\to 0} (|p| + |q|)\, h^s R_{\min} \left(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|\right)^{\frac{t}{h}-1} =$$

$$= (|p| + |q|)\, R_{\min} \lim_{h\to 0} \frac{h^s}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} \left(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|\right)^{\frac{t}{h}} =$$

$$= (|p| + |q|)\, R_{\min} \lim_{h\to 0} \frac{h^s}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} \left[\left(1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|\right)^{\frac{1}{h^{1-\alpha} C_{\min}|p|}}\right]^{\frac{t h^{1-\alpha} C_{\min}|p|}{h}} =$$

$$= (|p| + |q|)\, R_{\min} \lim_{h\to 0} \frac{h^s \mathrm{e}^{\frac{t C_{\min}|p|}{h^{\alpha}}}}{1 + h^{1-\alpha} C_{\min}|p|} = \infty.$$

Таким образом, итерационная процедура построения приближённого решения интегрального уравнения (3.5) расходится.

Для получения приближённого решения сходящегося к точному сделаем следующую замену переменных

$$v(t) = u(t) + p I_{0t}^{1-\alpha} u. \tag{3.6}$$

Выразим u через v, для чего решим уравнение (3.6). В результате имеем

$$u(t) = v(t) - p E_{0t;-p}^{1-\alpha,1-\alpha} v. \tag{3.7}$$

Подставим (3.7) в (1.9)

$$v(t) + q I_{0t}^{2-\beta} \left\{ v(t) - p E_{0t;-p}^{1-\alpha,1-\alpha} v \right\} = F(t),$$

и преобразуем, используя свойство композиции операторов (1.2) и (1.10) [8],

$$v(t) + q I_{0t}^{2-\beta} v - pq E_{0t;-p}^{3-\alpha-\beta,1-\alpha} v = F(t). \tag{3.8}$$

Обозначая точное решение интегрального уравнения (3.8) $v(t)$ в точках $t = t_i$ за v_i, а приближённое за $\tilde{v}_i$ на разбиении $t_i = ih$ отрезка $[0, T]$ имеем систему равенств

$$v_0 = F_0, \tag{3.9}$$

$$v_i + p I_{0t_i}^{2-\beta} v - pq E_{0t_i;-p}^{3-\alpha-\beta,1-\alpha} v = F_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.10}$$

Для дробного интеграла будем пользоваться формулой (3.3), а для оператора $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$ —

$$E_{0t_i;\lambda}^{\alpha,\sigma} u = h^{\alpha} \sum_{k=0}^{i} c_{ik}^{(\alpha,\sigma)} u_k + R_i^{(\alpha,\sigma)}(h), \tag{3.11}$$

где $c_{ik}^{(\alpha,\sigma)}$ — коэффициенты квадратурной формулы для оператора (1.10) с верхними параметрами α и σ в точке $t = t_i$ не зависящие от h, $R_i^{(\alpha,\sigma)}(h)$ — погрешность приближённого вычисления оператора с верхними параметрами α и σ в точке $t = t_i$. Заменим в каждом равенстве (3.10) интегральные операторы квадратурными формулами (3.3) и (3.11), при этом выразив v_i в явном виде

$$v_i = \frac{F_i - ph^{2-\beta}\sum\limits_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)} v_k - pR_i^{(2-\beta)}(h) + qh^{3-\alpha-\beta}\sum\limits_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} v_k + qR_i^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}(h)}{1 + ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n), \quad (3.12)$$

где v_0 определяется из (3.9). Для (3.12) должно выполняться следующее условие:

$$1 + ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \neq 0.$$

Для малых h это означает, что

$$\left| ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \right| < 1,$$

или

$$\left| ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \right| \leq C_h < 1. \quad (3.13)$$

С учётом того, что при вычислении v_i по формуле (3.12) используются приближённые значения, формула переписывается в виде

$$v_i = \frac{1}{1 + ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}} \left[F_i - ph^{2-\beta}\sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(2-\beta)}\tilde{v}_k - ph^{2-\beta}\sum_{k=0}^{i-1} R_k - \right.$$
$$\left. -pR_i^{(2-\beta)}(h) + pqh^{3-\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{i-1} c_{ik}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}\tilde{v}_k + pqh^{3-\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{i-1} R_k + pqR_i^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}(h) \right],$$

где R_k — полная погрешность вычисления значения $v(t)$ в точке $t = t_k$. В результате получаем систему из i равенств для вычисления приближённого решения в точке $t = t_i$

$$\tilde{v}_j = \frac{F_j - ph^{2-\beta}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_j k^{(2-\beta)}\tilde{v}_k + pqh^{3-\alpha-\beta}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_j k^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}\tilde{v}_k}{1 + ph^{2-\beta}c_{jj}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{jj}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}}, \quad (j = 1, 2, \ldots, i) \quad (3.14)$$

а также систему равенств для погрешностей

$$R_1 = \frac{-pR_1^{(2-\beta)}(h) + pqR_1^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}(h)}{1 + ph^{2-\beta}c_{11}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{11}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}},$$

$$R_j = \frac{1}{1 + ph^{2-\beta}c_{jj}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{jj}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}} \left\{ pqR_j^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}(h) - pR_j^{(2-\beta)}(h) - \right.$$
$$\left. -h^{2-\beta}p\sum_{k=1}^{j-1}\left[c_{jk}^{(2-\beta)} - qh^{1-\alpha}c_{jk}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \right] R_k \right\}. \quad (j = 2, 3, \ldots, i)$$

Оценим погрешность метода, с учётом малости h и следующих условий

$$\max_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \left\{ \left| c_{jk}^{(2-\beta)} \right|, \left| c_{jk}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \right| \right\} = C,$$

$$\max_{k=1,2,\ldots,i}\left\{\left|R_k^{(2-\beta)}(h)\right|,\left|R_k^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}(h)\right|\right\}=h^sR,$$

где s — порядок точности метода численного интегрирования. Теперь запишем систему неравенств для погрешностей

$$|R_1|\leq\frac{(1+|q|)|p|h^sR}{1-C_h},$$

$$|R_j|\leq\frac{h^{2-\beta}C|p|(1+|q|)\sum\limits_{k=1}^{j-1}|R_k|+(1+|q|)|p|h^sR}{1-C_h}\quad(j=2,3,\ldots,i).$$

Рассмотрим набор величин

$$\mathrm{R}_1=\frac{(1+|q|)|p|h^sR}{1-C_h},$$

$$\mathrm{R}_j=\frac{h^{2-\beta}C|p|(1+|q|)\sum\limits_{k=1}^{j-1}|R_k|+(1+|q|)|p|h^sR}{1-C_h}\quad(j=2,3,\ldots,i),$$

для которых, как видно, выполняется условие $|R_j|\leq\mathrm{R}_j$. Ясно, что каждое R_j ($j=2,3,\ldots,i$) может быть выражено через R_1 по формуле

$$\mathrm{R}_j=\mathrm{R}_1h^s\left(1+\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{2-\beta}\right)^{j-1}$$

или

$$\mathrm{R}_j=\frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h}h^s\left(1+\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{2-\beta}\right)^{j-1}. \tag{3.15}$$

При устремлении h к нулю в (3.15), с учётом $j=\frac{t}{h}$, имеем

$$\lim_{h\to0}\mathrm{R}_j=\lim_{h\to0}\frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h}h^s\left(1+\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{2-\beta}\right)^{\frac{t}{h}-1}=$$

$$=\frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h}\lim_{h\to0}\frac{h^s\mathrm{e}^{\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{1-\beta}}}{1+\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{2-\beta}}=0.$$

По результатам рассуждений сформулируем теорему.

Теорема 3.1. *При выполнении условия* (3.13) *приближённое решение* (3.14) *сходится к точному решению интегрального уравнения* (3.8), *а априорная оценка погрешности вычисления приближённого решения в точке* $t=t_i$ *имеет вид*

$$|v_i-\tilde{v}_i|\leq\frac{(1+|q|)|p|R}{1-C_h}h^s\left(1+\frac{C|p|(1+|q|)}{1-C_h}h^{2-\beta}\right)^{i-1}.$$

После того как найдено решение вспомогательного уравнения (3.8), искомое решение интегрального уравнения (1.9) вычисляется по формуле (3.7), с использованием любой из квадратурных формул для обобщения интегрального оператора Римана—Лиувилля (1.10), например (2.8) или (2.10).

Список литературы

1. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №1(20). – С. 24-36.

2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит. – 2003. – 272 с.

3. Огородников Е.Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши// Тр. шестой Всерос. научн. конф. с междунар. участием: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2009. – Ч. 1. – С. 177-181.

4. Огородников Е.Н., Яшагин Н.С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля// Тр. седьмой Всерос. научн. конф. с междунар. участием: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2010. – Ч. 3. – С. 225-232.

5. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области Наука. – М: Наука. – 1966. – 672 с.

6. Gorenflo R., Loutchko J., Luchko Y.F. Computation of the Mittag–Leffler function $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative// Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2002. – №5(4). – P. 491-518.

7. Яшагин Н.С. Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщения функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2010. – №5(21). – С. 229-236.

8. Огородников Е.Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей// Труды десятой межвузовской конференции: Матем. моделирование и краев. задачи. – Самара: СамГТУ. – 2000. – Ч. 3. – С. 119-126.

9. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М: Наука. – 1975. – 632 с.

10. Diethelm K., Ford N.J., Freed A.D., Luchko Y.F. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods// Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. – 2005. – №194. – P. 743-773.

Numerical method of Solution Initial problems for Second Order Differential Equations with Riemann–Liouville fractional derivates

© N. S. Yashagin[2]

Abstract. The numerical integration formulas for some integral operators with Abel kernel are obtained. The prior estimate for this formulas are presented. The iteration procedure for solving initial problem for second order differential equations with Riemann–Liouville fractional derivates are developed. Convergence are proved for this iteration procedure.

Key Words: differential equations with Riemann–Liouville fractional derivates, Volterra integral equation of the Second Kind, method of quadratures.

[2]Postgraduate Student of chair «Applied Mathematics and Informatics», Samara State Technical University, Samara; nik.yashagin@gmail.com.