УДК 517.9

# Об одном классе многошаговых методов для численного решения дифференциально-алгебраических уравнений индекса один

© Л. С. Соловарова[1]

**Аннотация.** В настоящей работе приведен анализ многошаговых схем, которые похожи на методы, основанные на формуле дифференцирования назад. Показано преимущества таких схем над классическими схемами

**Ключевые слова:** Линейные дифференциально-алгебраические уравнения, индекс один, разностные схемы.

## 1. Введение

Взаимосвязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и алгебраических уравнений часто встречается в различных прикладных задачах. Эти взаимосвязанные системы можно записать в виде системы ОДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной. Для таких систем можно задавать начальные условия, которые должны быть согласованы с правой частью исходной системы. Данный класс задач принято называть начальной задачей (задачей Коши) для дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Построение разностных схемдля ДАУ достаточно сложная, с точки зрения вычислительной математики, задача. В настоящей работе приведены разностные схемы, которые похожи на методы, основанные на формуле дифференцирования назад. На модельном примере проведено сравнение предлагаемых схем с классическими методами.

## 2. Постановка задачи и разностные схемы

Рассмотрим задачу

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), t \in [0,1], \tag{2.1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2.2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ - $(n \times n)$ - матрицы, $f(t)$ - заданная, $x(t)$ - искомая $n$-мерная вектор-функции. Предполагая, что элементы $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ обладают той гладкостью, которая необходима в дальнейшем.

В заметке рассмотрен случай, когда

$$detA(t) = 0 \forall t \in [0,1]. \tag{2.3}$$

Системы (2.1) с условием (2.3) принято называть линейными ДАУ. Будем предполагать, что начальные данные (2.2) согласованы с правой частью, т.е. рассматриваемая задача имеет решение.

[1]Программист лаборатории системного анализа и вычислительных методов, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, soleilu@mail.ru

**Определение 2.1.** *(см., напр, [1]).Система (1) имеет индекс один, если*

$$rank[(\lambda A(t)+B(t))^{-1}A(t)] = rank[(\lambda A(t)+B(t))^{-1}A(t)]^2 = r = const \forall t \in [0,1]. \quad (2.4)$$

Другие эквивалентные определения индекса можно найти в [2].

Известно [1], что при выполнении вышеприведенного условия, задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение. К настоящему времени вышло огромное множество работ, посвященных численному решению ДАУ индекса один. Как правило, первоначально эти алгоритмы были предназначены для численного решения жестких ОДУ, а в дальнейшем их обосновали для ДАУ индекса один. Однако относительно недавно были построены примеры жестких ДАУ, для численного решения которых большинство неявных методов оказались малоэффективными (требовался очень маленький шаг интегрирования)[3], [4]. В качестве иллюстрации приведем пример [4] :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & \alpha(\lambda t-1) \\ 1 & 1+\alpha t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1], \quad (2.5)$$

где $\alpha$ и $\lambda$ скалярные параметры, $u(0)=v(0)=1$. Данная задача имеет индекс один и точное решение $u=(1+\lambda t)e^{\lambda t}$, $v=e^{\lambda t}$. При $\lambda \ll 0$ мы имеем жесткую задачу. Стандартный $k$-шаговый метод для задачи (2.1), (2.2), основанный на формуле дифференцирования назад ( метод ФДН), имеет вид

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\rho_j x_{i+1} + hB_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1}, k \le 6, \quad (2.6)$$

где $A_{i+1}=A(t_{i+1}), B_{i+1}=B(t_{i+1}), f_{i+1}=f(t_{i+1}), t_{i+1}=ih$, $i=k,k+1,\ldots,N-1$, $h=1/N$, $x_{i+1}\approx x(t_{i+1})$, коэффициенты можно найти в [5] . Известно, что при $k\le 6$ методы ФДН являются устойчивыми для численного решения начальной задачи для ОДУ, а при $k \ge 7$ -неустойчивыми. Применяя метод (2.6) к данному примеру, обозначая $z=\lambda h$ $\omega=\alpha h$ и опуская выкладки, получим

$$u_{i+1} = (1+\alpha t_{i+1})v_{i+1}, \quad (2.7)$$

$$(\rho_0 - z - \omega)v_{i+1} + \sum_{j=1}^{k}(\rho_j-\omega)v_{i+1-j} = 0, \quad (2.8)$$

при этом полагая, что стартовые значения для $v_j$ и $u_j, j=0,1,\ldots,k-1$ заданы точно. Анализ уравнения (2.8) показал, что для любого $z<0$ существует $\omega$ такое, что как минимум один из корней характеристического уравнения (2.8) будет по модулю больше единицы. Таким образом,можно сделать вывод, что стандартные методы ФДН (2.6) для вышеприведенного примера малоэффективны. Ниже предложена модификация методов ФДН для задачи (2.1),(2.2) индекса один. Перепишем исходную систему (2.1) в виде

$$(A(t)x(t))' + (B(t)-A'(t))x(t) = f(t) \quad (2.9)$$

и для задачи (2.9),(2.2) будем применять методы ФДН, при этом вычисляя $A'(t)_{t=t_{i+1}}$ так же по методу ФДН. Предлагаемый алгоритм будет иметь вид

$$\sum_{j=0}^{k}\rho_j A_{i+1-j}x_{i+1-j} + (hB_{i+1} - \sum_{j=0}^{k}\rho_j A_{i+1-j})x_{i+1} = hf_{i+1} \quad (2.10)$$

Применяя последний алгоритм для (2.5) и опуская выкладки, получим

$$u_{i+1} = (1 + \lambda t_{i+1}) v_{i+1}, \tag{2.11}$$

$$(\rho_0 - z) v_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} \rho_j v_{i+1-j} = 0. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) полностью совпадает с методом ФДН для модельного уравнения $x' + \lambda x = 0$ и в отличии от формулы (2.8) не зависит от $\omega$. Отметим, что при $k = 1$ (одношаговый метод) схема (2.10) примет вид

$$(A_{i+1} x_{i+1} - A_i x_i) + (h B_{i+1} - A_{i+1} + A_i) x_{i+1} = h f_{i+1}, i = 0, 1, \cdots, N - 1, \tag{2.13}$$

которую можно переписать в виде

$$A_i (x_{i+1} - x_i) + h B_{i+1} x_{i+1} = h f_{i+1} \tag{2.14}$$

Детальный анализ последней схемы приведен в статьях [6], [7].

Детальное обоснование схем (2.10) предполагается провести в дальнейшем.

Автор благодарит М.В. Булатова за постановку задачи и обсуждение статьи.

Работа поддержена грантом РФФИ №11-01-00639-а, 11-01-93005Вьет-а.

## Список литературы

1. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных диффенренциальных уравнений.- Новосибирск:Наука, 1988.- 157 с.

2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.- Новосибирск:Наука, 1996.- 278с.

3. März R. Differental-algeraic systems anew//Appl.Numer.Math.2002.V.42.P.315-335.

4. Kunkel P., Mehrmann V. Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations//Electr.Trans.Numer.Anal.2007.V.26.P.385-420.

5. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.- М.:Мир, 1990.- 512 с.

6. Булатов М.В., Минг-Гонг Ли, Соловарова Л.С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т. 50, № 11. – С. 1909-1918.

7. Булатов М.В., Соловарова Л.С. О блочных разностных схемах для дифференциально-алгебраических уравнениях// Известия Иркутского Государственного университета. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 2-12.

# About the class of multistep methods for numerical solution differential-algebraic equations of index one

© L. S. Solovarova[2]

**Abstract.** In this paper we consider analysis of multistep schemes like methods based on back differentiation formula. We show advantages of this schems above classical methods
**Key Words:** linear differential-algebraic equations, index one, difference schems.

[2]Programmer laboratory systems analysis and computational methods, ISDCT SB RAS, Irkutsk; soleilu@mail.ru