УДК 517.948.67

Регуляризация задачи с возмущениями линейного уравнения малыми линейными слагаемыми

© **Б. В. Логинов**[1], **В. Е. Поспеев**[2]

Аннотация. Выполнена регуляризации задачи о возмущении линейного уравнения малыми линейными слагаемыми в условиях задания δ-приближений по норме операторов и правой части.

Ключевые слова: линейное уравнение, возмущение, регуляризация.

Рассматривается уравнение $By = h + A(\varepsilon)y$ (1), где $B \in L(E_1 \to E_2)$ оператор с незамкнутой областью значений, $\dim N(B) = \dim N^\star(B) = n$, $0 \leq n < \infty$, E_1 и E_2 банаховы пространства. Решение задачи (1) с фредгольмовым оператором B содержится в [1]. Здесь для простоты изложения рассматривается случай $n = 1$ и $A(\varepsilon) = \varepsilon A$, обобщения не вызывают принципиальных затруднений. Используются терминология и обозначения [1]. Требуется построить решение уравнения (1) по заданным δ-приближениям $\tilde{B}$, $\tilde{A}$, $\tilde{h}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{z}$ ($N(B) = \{\varphi\}$, $N^\star = \{\psi\}$, (γ, φ), $(\psi, z) = 1$). Предполагается, что оператор A подчиняет себе неограниченный оператор $\Gamma = \hat{B}^{-1}$, $\hat{B} = B + (\gamma, \cdot)z$.

Если p длина жордановой цепочки $(\varphi^{(i)}, i = \overline{1,p})$ элемента $\varphi = \varphi^{(1)}$, то для ее построения используются уравнения $(\tilde{\hat{B}} + \alpha_j C)\tilde{\varphi}^{(j)} = \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(j-1)}$, $\alpha_j = \delta^{2^{-(j-1)}}$, где оператор C такой, что $(\psi^{(1)}, C\varphi^{(1)}) \neq 0$, т.е. $\|B + \alpha C\| = O(\alpha^{-1})$. Тогда [2] $\|\varphi^{(j)} - \tilde{\varphi}^{(j)}\| = O(\delta^{2^{-(j-1)}})$ и $|(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)})| = 1 + O(\delta^{2^{-(p-1)}})$. Согласно [1] $y = \sum\limits_{i=-p}^{q} y_i \varepsilon^i + u(\varepsilon)$. Коэффициенты $\tilde{y}_i$ асимптотики решения (1) определяются в виде $\tilde{y}_{-p} = \tilde{\xi}_1 \tilde{\varphi}^{(1)}, \ldots, \tilde{y}_{-1} = \sum\limits_{j=1}^{p} \tilde{\xi}_j \tilde{\varphi}^{(j)}$, $\tilde{y}_s = \sum\limits_{j=1}^{s+1} \tilde{\xi}_j \tilde{\varphi}^{(j)} + \tilde{b}_s$, $\tilde{\varphi}^{(i)} = \tilde{\varphi}^{(i - [\frac{i}{p}]p)}$, $0 \leq s \leq q$; $(\tilde{\hat{B}} + \alpha_s C)\tilde{b}_s = \tilde{A}\tilde{b}_{s-1}$, $\tilde{A}\tilde{b}_{-1} = \tilde{h}$; $\tilde{\xi}_j(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)}) + (\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{j-2}) = 0$ если $j \leq p$, и $(\tilde{\xi}_j + \ldots + \tilde{\xi}_{p+k} + \tilde{\xi}_k)(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{\varphi}^{(p)}) + (\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{j-2}) = 0$ при $j = [\dfrac{j}{p}]p + k$, т.е. $\tilde{\xi}_j$ вычисляются с запаздыванием в p шагов. По индукции доказывается, что $\|\tilde{y}_0 - y_0\| = O(\delta^{2^{-p}}), \ldots, \|\tilde{y}_q - y_q\| = O(\delta^{2^{-(p+q)}})$. Число q определяется условием $|(\tilde{\psi}^{(1)}, \tilde{A}\tilde{b}_{q-1})| = const + O(\delta^{2^{-q}})$.

Построить решение (1) последовательным определением коэффициентов $\tilde{y}_i$, $i = -p, \ldots,$ невозможно из-за роста погрешности вместе с i. Поэтому, как и в [2] для общей задачи теории ветвления, остаток $\tilde{u}(\varepsilon)$ при $\rho_0 \leq |\varepsilon| \leq \rho$ определяется равномерным по ε регуляризированным процессом последовательных приближений.

Список литературы

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.:Наука, 1969. – 524 с.

2. Сидоров Н.А., Треногин В.А., Мат. заметки, т.20, № 5,, 1976.

[1]Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

[2]В. Е. Поспеев (1935 - 1989). До 1989 года доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ташкентский государственный университет, г. Ташкент.

3. Гуковский С.А., Известия АН УзССР, сер. физ.-мат.,1979, №2.

Regularization of the problem about perturbations of linear equation by small linear terms.

© B. V. Loginov[3], V. E. Pospeev[4]

Abstract. The regularization of the problem about perturbation of linear equation by small linear terns under the conditions of given δ-approximations by norm of operators and right-hand side is made.
Key Words: linear equation, perturbation, regularization.

References

1. Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. – M.:Nauka, 1969. – 524 pp.
2. Sidorov N.A., Trenogin V.A., Matem.Zametki, v.20, № 5,, 1976.
3. Gukovsky S.A., Izvestiya AN UzSSR, ser. fiz.-mat.,1979, №2.

[3]Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru.
[4]V. E. Pospeev (1935 - 1989). Until 1989 Associate Professor of Differential Equations Chair, Tashkent State University, Tashkent.