УДК 519.853.62

О версии регуляризованного проекционного двухшагового квазиньютоновского метода

© **В. Г. Малинов** [1]

Аннотация. В работе исследуется регуляризованный по Тихонову метод на основе новой версии проекционного обобщенного двухшагового двухэтапного метода переменной метрики для решения задач минимизации с неточными исходными данными на выпуклом замкнутом множестве в сепарабельном гильбертовом пространстве. Метод является одним из возможных итеративных аналогов исследованного непрерывного метода второго порядка с переменной метрикой. Доказывается сходимость для выпуклых гладких функций с Липшицевыми градиентами и оценка скорости сходимости метода – при дополнительном требовании сильной выпуклости функций. Построено правило останова и указан регуляризующий оператор. Метод отличается от своего предшественника в данном классе методов лучшей точностью и вычислительной устойчивостью.

Ключевые слова: минимизация на простом множестве, неустойчивая задача, регуляризованный проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный, метод переменной метрики, сходимость, скорость сходимости.

1. Введение

В сепарабельном гильбертовом пространстве H, нормированном скалярным произведением, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \quad \mathbf{x} \in H$, будем рассматривать задачу минимизации на выпуклом замкнутом множестве Q,

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset H, \tag{1.1}$$

где выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$. Предполагаем, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет гиперповерхности уровней овражной структуры и ограничена снизу, множество её минимумов не пусто,

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \ \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : \ f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

исходные данные задачи (1.1), градиенты $\nabla f(\mathbf{x})$, имеют погрешности, т.е. задача относится к классу некорректных (см. [1] – [5]).

Новые методы решения задач с неточными исходными данными, с «овражными» функциями, исследованы за предыдущие десятилетия; развиты как новые непрерывные [6] - [9], так и новые итеративные методы. Поскольку здесь предпочтительно применение проекционных многошаговых регуляризованных методов, то были предложены и исследованы двухшаговый, трёхшаговый [10] –[13], четырёхшаговый методы проекции градиента (МПГ) и обобщенный двухшаговый [14] регуляризованные методы, которые обладают многими известными достоинствами. Но для МПГ обнаруживается факт возрастания вычислительной погрешности в окрестности минимума вследствие использования градиента функции на «дне оврага» гиперповерхности уровня, где его величина мала. Проекционным *обобщённым* многошаговым регуляризованным методам решения задачи (1.1), простейшими из которых являются двухшаговые, этот недостаток не присущ.

Поэтому разработаны методы регуляризации на основе нового класса методов – *проекционных обобщённых двухшаговых двухэтапных* (ПОДМ), предназначенных главным образом для минимизации функций с «овражными» гиперповерхностями уровней. Методы этого класса для построения минимизирующей последовательности $\{\mathbf{x}^k\} \longrightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

используют прогнозные точки $\mathbf{z}^k = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})$ на «склоне» оврага гиперповерхности уровня функции $f(\mathbf{x})$ (где α_k – параметр методов класса) и производят поиск в направлении, являющемся линейной комбинацией антиградиента $-\nabla f(\mathbf{z}^k)$ и вектора $\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$. ПОДМ мало чувствительны к овражности функций и ошибкам округлений [15].

У разработанных методов не исключено явление замедления сходимости в окрестности точки минимума, а попытка его устранения привела к разработке нового класса проекционных методов минимизации переменной метрики; первоначально в случае непрерывных моделей оптимизации – это регуляризованные непрерывные МПГ с переменной метрикой (РНМПГПМ) первого и второго порядков (см., например, [16], [17]). Они минимизируют функцию путём решения обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующих порядков с оператором проектирования в переменной метрике в правой части уравнения. Для построения РНМПГПМ, согласно их основной идее, сначала строится пространство с новым скалярным произведением.

Идея оснащения пространства новой метрикой в РНМПГПМ, в случае математических моделей для итеративных методов, распространена на ПОДМ квазиньютоновские регуляризованные (ПОДКРМ) (см. [18], [19]). Здесь предлагается и исследуется новый ПОДКРМ. Теоретическая основа базового для него метода имеется в работе [20].

2. Метод решения задачи

Для построения метода регуляризации в сепарабельном гильбертовом пространстве H, наряду с существующей метрикой и оператором $P_Q(\mathbf{v})$ проектирования вектора $\mathbf{v} \in H$ на множество Q, введём новую метрику с помощью нового скалярного произведения $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})$ $\forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H$ и оператор $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$ проектирования в новой метрике в точке $\mathbf{x} \in H$ вектора $\mathbf{v} \in H$ на множество Q, аналогично проведённому в работе [20]. Критерий проекции $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}] \in Q$ в метрике $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ есть неравенство

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{w} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \mathbf{u} \in Q. \tag{2.1}$$

Эта проекция существует и единственна как решение квадратичной задачи

$$g(\mathbf{u}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in Q, \tag{2.2}$$

в силу выпуклости множества Q и сильной выпуклости функции $g(\mathbf{u})$. Полученное гильбертово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками, обозначим H_1. Далее рассмотрим методы в этом пространстве, при этом для простоты часто пользуемся старым обозначением H для этого пространства.

Примечание 1. Поскольку сепарабельные гильбертовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны ([22], с. 156), в новом пространстве H_1 сохраняются все соотношения и теоремы из исходного H, связанные со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. В пространстве H_1 по самому его построению наряду с (2.1) имеет место критерий

$$(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q \tag{2.3}$$

проекции $\mathbf{w} \in Q$ вектора $\mathbf{v} \in H_1$ на выпуклое замкнутое множество Q ([21], с. 189).

В H_1 для решения поставленной в п.1 задачи рассмотрим ПОДКРМ:

$$1\ \text{этап.}\ \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right); \tag{2.4}$$

$$2\ \text{этап.}\ \mathbf{x}^{k+1} = P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla t_k(\mathbf{z}^k)], k = 0, 1, 2, ..., \tag{2.5}$$

где $\mathbf{x}^0$ - произвольная начальная точка из H_1; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ - последовательность положительно определённых самосопряжённых линейных операторов;

$$\nabla t_k(\mathbf{z}^k) = \nabla f_k(\mathbf{x}) + \tau_k \mathbf{z}^k - -- \tag{2.6}$$

приближение в точке $\mathbf{z}^k$ точного градиента $\nabla T(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) + \tau\mathbf{x}$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \tau\|\mathbf{x}\|^2/2$; приближённые градиенты $\nabla f_k(\mathbf{x})$ таковы, что

$$\max \|\nabla f_k(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \le \delta_k(1 + \|\mathbf{x}\|), \forall \mathbf{x} \in Q, \quad k \ge 0; \tag{2.7}$$

$\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k$ – параметры метода (2.4)–(2.7).

Оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \le (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le M\|\mathbf{u}\|^2, \quad 0 < m \le M, \ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1. \tag{2.8}$$

В силу условий, наложенных на функцию $f(\mathbf{x})$, функция $T(\mathbf{x})$ дифференцируема по Фреше на множестве Q; полагаем, что выполнено свойство её непрерывной дифференцируемости на Q. Отметим, что базовый метод для ПОДКРМ отличается от метода из работы [19] наличием операции проектирования на первом этапе, что препятствует «выбросу из оврага» на первом этапе метода и способствует увеличению скорости сходимости метода. Отметим также, что операция $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$ проектирования вектора в новой метрике в новом методе не выполняется, то есть задача (2.2) квадратичной минимизации не решается. Эта проекция играет вспомогательную роль и наряду с неравенством (2.1) используется для установления связи между условиями оптимальности в исходной и новой метриках пространства H_1.

Регуляризованный метод (2.4)–(2.6) есть один из возможных итеративных аналогов исследованного в [19] непрерывного регуляризованного метода переменной метрики

$$\begin{gathered}\alpha(t)\mathbf{x}''(t) + \beta(t)\mathbf{x}'(t) + \mathbf{x}(t) = P_Q\left[\mathbf{x}(t) - \gamma(t)\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}(t))\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{x}(t), t)\right], \\ t \ge 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}^1,\end{gathered}$$

где $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1 \in H$ – начальные точки; векторные производные $\mathbf{x}'(t) = d\mathbf{x}(t)/dt$, $\mathbf{x}''(t) = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$ функции $\mathbf{x}(t)$, $t > 0$; со значениями в гильбертовом пространстве H;

$$\mathbf{T}'_\delta(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t), t) + \tau(t)\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) \in H, \quad t \ge 0 - --$$

приближение градиента $\nabla T(\mathbf{x}(t), t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\mathbf{x}(t)$ функции Тихонова $T(\mathbf{x}(t), t) = f(\mathbf{x}(t)) + \tau(t)\|\mathbf{x}(t)\|^2/2$; $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\tau(t)$, $\delta(t)$ – параметры метода; $\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t), t)$ – приближённый градиент функции $f(\mathbf{x}(t))$; решение $\mathbf{x}(t)$ задачи Коши существует на полуоси $[0; +\infty)$ при любых начальных точках.

Примечание 2. Итерационными формулами (2.4), (2.5) задается целое семейство ПОДКРМ. В зависимости от выбора последовательности операторов $\mathbf{B}_k$ и способов выбора параметров метода, из (2.4), (2.5) получаем различные ПОДКРМ или, при $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \nabla^2 f(\mathbf{z}^k)$, регуляризованный ПОДМ второго порядка. Ввиду выполнения (2.8) существует $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = I$, где I – тождественный оператор.

3. Вспомогательные утверждения

Приведём сначала в леммах 1,2,3 необходимые здесь вспомогательные утверждения, доказательства которых даны в работе [20].

Л е м м а 1. *Пусть выпуклые функции* $f(\mathbf{x})$ *и* $\varphi(\mathbf{x})$ *класса* $C^{1,1}(H_1)$ *таковы, что*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in H_1 \tag{3.1}$$

и множество точек минимума функций $f(\mathbf{x})$ *и* $\varphi(\mathbf{x})$ *не пусто,* $Q_* \neq \emptyset$.

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ *в пространстве* H_1 *имеет место неравенство*

$$(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{u} \in Q. \tag{3.2}$$

Л е м м а 2. *Пусть выпуклое замкнутое множество* $Q \subset H_1$, *выпуклая функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$, *точка* $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$.

Тогда для точки $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q$ *равенство*

$$\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right] \tag{3.3}$$

в пространстве H_1 *эквивалентно неравенству (3.2).*

Следующая лемма выражает связь между необходимыми условиями оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ в исходной и новой метриках пространства H.

Л е м м а 3. *Пусть: 1) множество* $Q \subset H_1$ *выпукло и замкнуто; 2) выпуклая функция* $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(H_1)$; *3) выполнено неравенство (3.2).*

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset H_1$ *равенство* $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)}[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)]$ *в* H_1 *эквивалентно неравенству* $(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) \geq 0, \quad \forall \quad \mathbf{u} \in Q$.

Примечание 3. Классы операторов и функций, удовлетворяющих условию (3.1), не пусты. В самом деле, в класс таких операторов входят тождественный оператор (и скалярная матрица) и оператор (матрица) вторых производных $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$, а также существуют удовлетворяющие ему другие самосопряженные положительно определённые линейные операторы (симметричные матрицы). В класс функций, удовлетворяющих условию (3.1), например, входят выпуклые дважды гладкие функции. Некоторые примеры таких функций и операторов приведены в [20].

Возникает интересная, пока еще нерешённая, проблема полной характеристики классов функций $\varphi(\mathbf{x})$ и операторов $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1).

Л е м м а 4. *В гильбертовом пространстве* H_1 *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|a - b\|^2 = \|a - c\|^2 + 2(a - c, c - b) + \|c - b\|^2, \quad \forall a, b, c \in H_1. \tag{3.5}$$

при $a = \mathbf{u}, c = \mathbf{v}, b = \mathbf{w}$, запишем его в форме

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_1. \tag{3.6}$$

и второе слагаемое в его правой части оценим с помощью неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2, a, b, \varepsilon > 0, \tag{3.7}$$

то есть $2|(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2$, $\varepsilon > 0$. Тогда из (3.6) получим $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon^{-1}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$. Отсюда следует неравенство (3.4).

Лемма 4 доказана.

4. Обоснование сходимости ПОДКРМ

Нормальным решением задачи (1.1) называют её решение с минимальной нормой. Исследуем достаточные условия сильной сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ ПОДКРМ (2.4)-(2.7) к нормальному решению.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия: 1) множество $Q \in H$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1.1}(Q)$ выпуклая и выполнены соотношения (1.2);*

3) для приближений $\nabla f_k(\mathbf{x})$ точного градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ выполнено (2.7);

4) оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in H$ таков, что выполнены неравенства (2.8);

5) выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1.1}(Q)$ такова, что имеет место равенство (3.1);

6) параметры $\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k$ метода семейства (2.4)–(2.7) таковы, что:

$$\alpha_k \geq \alpha_{k+1} > 0, \beta_k \geq \beta_{k+1} > 0, \tau_k \geq \tau_{k+1} > 0, \delta_k \geq 0, k \geq 0;$$

$$(\tau_k - \tau_{k+1})^2 \left[\beta_{k-1}\tau_{k-1}\right]^{-1} \tau_k^{-2} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\tau_k - \tau_{k+1} \to 0, \quad \beta_k \left(\delta_k + \tau_k\right) \left(\beta_{k-1}\tau_{k-1}\right)^{-1} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая ПОДКРМ (2.4)-(2.7), (4.1), из любой начальной точки $\mathbf{x}^0 \in H$, равномерно относительно выбора приближённых градиентов $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в (2.7), по норме H сходится к точке $\mathbf{x}^* \in Q_*$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \longrightarrow 0, \quad k \to \infty, \tag{4.2}$$

где $\|\mathbf{x}^*\| = \inf_{\mathbf{x} \in Q_*} \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x}^* \in Q_*$ – нормальное решение задачи (1.1).

Доказательство. Прежде всего отметим, что в условиях теоремы в построенном пространстве множество Q_* минимумов задачи выпукло и замкнуто, нормальное решение задачи (1.1) и минимум функции $T(\mathbf{x})$ существуют. На множестве $Q \in H$ существует точка $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}(k)$ такая, что имеют место соотношения:

$$T(\mathbf{v}^k) = \inf_{\mathbf{x} \in Q} T(\mathbf{x}), k \geq 0, \quad \lim_{k \to \infty} \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^*\| = 0, \tag{4.3}$$

$$\left(\nabla T(\mathbf{v}^k), \mathbf{u} - \mathbf{v}^k\right) \geq 0, \ \mathbf{u} \in Q, \tag{4.4}$$

$$\|\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \leq C\tau_k^{-1}|\tau_k - \tau_{k+1}|, \quad k \geq 0, \tag{4.5}$$

$$C = \sup_{k \geq 0} \max\left\{\|\mathbf{v}^k\|; \ \|\nabla f(\mathbf{v}^k)\|\right\}. \tag{4.6}$$

Отметим, что соотношения (4.3)–(4.6) верны, с разными точками $\mathbf{v}^k = \mathbf{v}(k)$, в пространствах с исходной и новой метриками.

Обосновывая (4.2), оценим правую часть неравенства

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| + \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^*\|, \ k \geq 0. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.3), для правой части (4.7) остаётся обосновать соотношения

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \to 0, \quad \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{4.8}$$

Из характеристического свойства оператора проектирования (2.3) ([5], с. 72) и из (2.4), (2.5), пользуясь идеей из работы [15], получаем вариационные неравенства

$$\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha\mathbf{y}^k, \mathbf{u} - \mathbf{z}^k\right) \geq 0,$$
$$(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k + \beta\mathbf{B}_k^{-1}\nabla t_k(\mathbf{z}^k), \mathbf{u} - \mathbf{x}^{k+1}) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

(Здесь и далее индекс k у параметров метода для краткости почти везде опускаем.) Сложим оба вариационных неравенства и, пользуясь свойствами скалярного произведения, представим полученное неравенство в форме

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2+\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{u}\right)+\alpha\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{u}-\mathbf{z}^k\right)\le\\ \le\beta\left(\mathbf{B}_k^{-1}\nabla t_k(\mathbf{z}^k),\mathbf{u}-\mathbf{x}^{k+1}\right),\quad k\ge0,\ \forall\,\mathbf{u}\in Q.\end{gathered}\tag{4.9}$$

Далее оценим второе и третье слагаемые в левой части (4.9). Для второго слагаемого $\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{u}\right)=\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\right)+\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\right)$ правые части оцениваются с помощью (3.5), $\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\right)=0.5\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2\right)$, $\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\right)=0.5\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\|^2\right)$, поэтому

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{u}\right)=\\ =0.5\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2-\|\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\|^2\right).\end{gathered}\tag{4.10}$$

Для третьего слагаемого в левой части (4.9)

$$\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{u}-\mathbf{z}^k\right)=\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{u}-\mathbf{x}^k\right)+\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\right)$$

первое скалярное произведение оценивается с помощью (3.5),

$$\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{u}-\mathbf{x}^k\right)=0.5\left(\|\mathbf{u}-\mathbf{x}^{k-1}\|^2-\|\mathbf{u}-\mathbf{x}^k\|^2-\|\mathbf{y}^k\|^2\right),$$

а второе – с помощью неравенства (3.7) при $\varepsilon=1$,

$$\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\right)=-\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\right)\ge-0.5\left(\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|^2+\|\mathbf{y}^k\|^2\right),$$

поэтому

$$\begin{gathered}\alpha\left(\mathbf{y}^k,\mathbf{u}-\mathbf{z}^k\right)\ge\\ \ge0.5\alpha\left(\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\|^2-\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2\right)-\alpha\|\mathbf{y}^k\|^2.\end{gathered}\tag{4.11}$$

Подставим оценки (4.10) и (4.11) в левую часть (4.9):

$$\begin{gathered}0.5\left[\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2+(1-\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2+\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{u}\|^2\right]-\\ -0.5(1+\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{u}\|^2+0.5\alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{u}\|^2-\alpha\|\mathbf{y}^k\|^2\le\\ \le\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla t_k(\mathbf{z}^k),\mathbf{u}-\mathbf{x}^{k+1}\right),\quad k\ge0,\quad\forall\mathbf{u}\in Q.\end{gathered}\tag{4.12}$$

Теперь воспользуемся леммами 1 и 2. Неравенство (3.2), умноженное на $\beta>0$, запишем при $\mathbf{x}^*=\mathbf{v}^k$, $f(\mathbf{x}^*)=T(\mathbf{v}^k)$:

$$\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k)\nabla T(\mathbf{v}^k),\mathbf{u}-\mathbf{v}^k\right)\ge0\quad\forall k\ge0,\quad\mathbf{u}\in Q.$$

Положим здесь $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{k+1}$, а в (4.12) положим $\mathbf{u}=\mathbf{v}^k$, полученные неравенства сложим и, умножив на 2, придём к неравенству

$$a\le2\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla t_k(\mathbf{z}^k)-,\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k)\nabla T(\mathbf{v}^k),\mathbf{v}^k-\mathbf{x}^{k+1}\right)\quad k\ge0,$$

где $a=\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2+(1-\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2+\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{v}^k\|^2+\alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{v}^k\|^2-$ $-(1+\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2-2\alpha\|\mathbf{y}^k\|^2$. Это неравенство, пользуясь выражениями для точного и приближённого градиентов функции Тихонова, представим в форме

$$\begin{gathered}a\le2\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\left(\nabla f_k(\mathbf{z}^k)-\nabla f(\mathbf{z}^k)\right),\mathbf{v}^k-\mathbf{x}^{k+1}\right)+\\ +2\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k)\nabla f(\mathbf{v}^k)+\tau\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)(\mathbf{z}^k-\mathbf{v}^k),\mathbf{v}^k-\mathbf{x}^{k+1}\right)+\\ +2\beta\tau\left([\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)-\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{v}^k)]\mathbf{v}^k,\mathbf{v}^k-\mathbf{x}^{k+1}\right),\quad k\ge0.\end{gathered}\tag{4.13}$$

Преобразуем (4.13), используя (2.7), (4.5), неравенство Коши-Буняковского, и вытекающие из (2.8) неравенства

$$(1/M)\|\mathbf{u}\|^2 \le (\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \le \|\mathbf{u}\|^2/m, \quad \mathbf{u}, \mathbf{x} \in H_1, \tag{4.14}$$

где M и m из (2.8), нерастягивающим свойством оператора проектирования ([21], с. 190), следующей из (4.14) оценкой $\|\mathbf{B}^{-1}\| \le 1/m$. Получим неравенство

$$\begin{gathered} a + 2\beta\tau\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)(\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k), \mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\right) \le \\ \le 2\beta\left[\delta(1 + \|\mathbf{z}^k\|)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|/m + \left(\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \varphi(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right)\right] + \\ +2\beta\tau\left(\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + 2\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|\right)/m, \quad k \ge 0. \end{gathered}$$

К скалярному произведению в левой части применим левое неравенство (4.14), к первому, третьему и четвёртому слагаемым в правой части - неравенство (3.7), и (4.6):

$$\begin{gathered} 2(1 + \|\mathbf{z}^k\|)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \le 2\left(1 + \|\mathbf{v}^k\| + \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\right)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\| \le \\ \le 2(1 + C)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| + 2\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \le \\ \le (1 + C)^2 + 2\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2; \\ 2\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \le \|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + \|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2; \\ 2\|\mathbf{v}^k\|\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \le 6C^2/5 + 5\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/6; \end{gathered}$$

тогда придём к неравенству

$$\begin{gathered} a + 2\beta\tau\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2/M \le 2\beta\left(\nabla\varphi(\mathbf{z}^k) - \nabla\varphi(\mathbf{v}^k), \mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\right) + \\ +\beta(2\delta + 11\tau/6)\|\mathbf{v}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2/m + \beta(\delta + \tau)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{v}^k\|^2/m + g_1, \ k \ge 0, \end{gathered} \tag{4.15}$$

где $g_1 = \beta\left[\delta(1 + C)^2 + 12C^2\tau/5\right]/m$. Здесь оценим: в правой части – квадрат нормы во втором слагаемом, с помощью известного неравенства

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \le (1 + \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \quad \varepsilon > 0, \ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H. \tag{4.16}$$

при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^k$, $\varepsilon = 1/2$, то есть $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 \le 3\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/2 + 3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2$; в первом слагаемом в левой части – получаемым из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$ неравенством

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 \tag{4.17}$$

при $\varepsilon = 5/12$, то есть $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge 7\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/12 - 7\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2/5$. И здесь второе слагаемое в правой части, учитывая слагаемое в левой части (4.15) и что $-7/5 = 2/5 - \alpha - (1 - \alpha)$, представим в виде суммы двух слагаемых, тогда

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge 7\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/12 - (1 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 + (2/5 - \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2,$$

где последнее слагаемое с множителем $2/5$ оценим с помощью неравенства

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 \ge (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}^k - \mathbf{z}^k\|^2, \quad \varepsilon > 0,$$

получаемого из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$, положив в нём $\varepsilon = 1 + 10\alpha$,

$$2\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2/5 \ge -4\alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + 4\alpha\|\mathbf{v}^k - \mathbf{z}^k\|^2/(1 + 10\alpha);$$

последнее слагаемое с множителем $-\alpha$ оценим с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования,

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \|P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k) - P_Q(\mathbf{x}^k)\|^2 \le \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2; \tag{4.18}$$

$$-\alpha\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|^2 \geq -\alpha^3\|\mathbf{y}^k\|^2.$$

Тогда получим оценку

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2 \geq 7\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/12-(1-\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{z}^k\|^2- \\ -4\alpha\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+4\alpha\|\mathbf{v}^k-\mathbf{z}^k\|^2/(1+10\alpha)-\alpha^3\|\mathbf{y}^k\|^2.$$

Подставив её и оценку для слагаемого из правой части (4.15), с учётом неравенств для коэффициентов $2\beta\tau/M>0$, $4\alpha/(1+10\alpha)>0$, преобразуем (4.15) к виду

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{v}^k\|^2-(1+5\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+ \\ +[7/12-\beta(3\delta+11\tau/4)/m]\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+\alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{v}^k\|^2- \\ -(2\alpha+\alpha^3)\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq 2\beta\left(\nabla\varphi(\mathbf{z}^k)-\nabla\varphi(\mathbf{v}^k),\mathbf{v}^k-\mathbf{x}^{k+1}\right)+ \\ +\beta\left[(6\delta+11\tau/2)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+(\delta+\tau)\|\mathbf{z}^k-\mathbf{v}^k\|^2\right]/m+g_1, \quad k\geq 0.\end{gathered} \tag{4.19}$$

Здесь для скалярного произведения в правой части воспользуемся оценкой (см. [21], с. 188) $(\nabla f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{u}),\mathbf{u}-\mathbf{z}) \leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^2/4, \quad \mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{z}\in Q$ для выпуклых функций $f(\mathbf{x})\in C^{1,1}(Q)$, положив $\mathbf{x}=\mathbf{z}^k$, $\mathbf{u}=\mathbf{v}^k$, $\mathbf{z}=\mathbf{x}^{k+1}$. Затем оценим квадрат нормы с помощью неравенства (4.16) при $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v}=\mathbf{x}^k$, $\mathbf{w}=\mathbf{z}^k$, $\varepsilon=1/7$ и (4.18):

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2 \leq 8\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/7+8\|\mathbf{z}^k-\mathbf{x}^k\|^2 \leq 8\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/7+8\alpha^2\|\mathbf{y}^k)\|^2;$$

Следовательно, $(L\beta/2)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^k\|^2 \leq 4L\beta\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2/7+4L\alpha^2\beta\|\mathbf{y}^k\|^2$. После подстановки этого результата в (4.19) получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{v}^k\|^2-(1+5\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2+ \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{v}^k\|^2-a_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2 \leq \\ \leq \beta(6\delta+11\tau/2)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+a_0\|\mathbf{z}^k-\mathbf{v}^k\|^2+g_1, \ k\geq 0,\end{gathered}$$

где $a_0=\beta(\delta+\tau)/m$, $a_2=7/12-4L\beta/7-\beta(3\delta+11\tau/4)/m$; $a_{41}=\alpha^3+4L\alpha^2\beta+2\alpha$. Здесь оценим квадрат нормы во втором слагаемом в правой части с помощью нерастягивающего свойства оператора проектирования и (4.16) при $\varepsilon=1/2$,

$$\begin{gathered}\|\mathbf{z}^k-\mathbf{v}^k\|^2=\|P_Q\left(\mathbf{x}^k+\alpha\mathbf{y}^k\right)-P_Q(\mathbf{v}^k)\|^2 \leq \\ \leq \|\mathbf{x}^k+\alpha\mathbf{y}^k-\mathbf{v}^k\|^2 \leq 3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2/2+3\alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2.\end{gathered}$$

Тогда придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{v}^k\|^2-a_1\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+a_2\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \leq \\ \leq a_3\|\mathbf{x}^k-\mathbf{v}^k\|^2+a_4\|\mathbf{y}^k\|^2-\alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{v}^k\|^2+g_1, \ \ k\geq 0,\end{gathered} \tag{4.20}$$

где $a_1=a_{1k}=1/6$; $a_3=a_{3k}=5/6+5\alpha+\beta\left[6\delta+11\tau/2+3(\delta+\tau)/2\right]/m$; $a_4=a_{4k}=2\alpha+\alpha^3+4L\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta(\delta+\tau)/m$.

Обозначим $s_k=\beta_{k-1}\tau_{k-1}$, левую часть (4.20) через u_{k+1}, разность между правой частью (4.20) без g_1 и выражением $(1-s_k)u_k$ обозначим w_k. Тогда из (4.20) имеем

$$u_{k+1} \leq (1-s_k)u_k+w_k+g_1, \quad k-1\geq N. \tag{4.21}$$

Покажем равномерную сходимость последовательности $\{u_k\}$ относительно выбора приближённых градиентов в (2.7). Сначала заметим, что существует число $k_0>1$ такое, что $\forall\, k-1\geq k_0$ с учетом (4.1) имеют место неравенства

$$\begin{gathered}15\beta_k(16Lm/7+12\delta_k+11\tau_k) \leq 23m, \\ \beta_k\left(15\delta_k+14\tau_k\right)<2m\alpha_k, \\ \alpha_k^2+4L\alpha_k\beta_k+3\alpha_k\beta_k(\delta_k+\tau_k)/m<1, \quad 0<s_k<1,\end{gathered} \tag{4.22}$$

ввиду которых имеем $a_{2k} \ge 1/5$; $a_{3k} < 5/6 + 6\alpha_k$; $a_{4k} < 3\alpha_k \ \ \forall\, k-1 \ge k_0$.

Теперь оценим u_{k+1} снизу. Из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^k$, следует,

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{v}^k\|^2 \ge (1-\varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2,$$

откуда при $\varepsilon = 6/5$ следует оценка снизу для левой части (4.21),

$$u_{k+1} \ge (1/6 - a_1)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + (a_2 - 1/5)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \ge 0, \tag{4.23}$$

поскольку $a_1 = 1/6$ и выполнены (4.22). Обозначим $a_{11} = a_{1(k-1)}$, $a_{21} = a_{2(k-1)}$.

Далее оценим w_k сверху. В выражении $w_k = a_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 + a_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - (1-s_k)\left[\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 - a_{11}\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + a_{21}\|\mathbf{y}^k\|^2\right]$ воспользуемся получаемыми с помощью (4.16) при $\varepsilon = s_k$ неравенствами

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^k\|^2 \le (1+s_k)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + (1+s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2,\\ \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 \le (1+s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 + (1+s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}w_k \le [a_3 + a_{11}(1-s_k)]\,(1+s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 + a_5\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 -\\ -[(1-s_k) - a_3(1+s_k)]\,\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 - [a_{21}(1-s_k) - a_4]\,\|\mathbf{y}^k\|^2,\end{gathered}$$

где $a_5 = a_{11}(1-s_k^2) - \alpha$. Отсюда, с учетом неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 \le (1+s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 + (1+s_k^{-1})\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2,$$

получаем оценку

$$\begin{gathered}w_k \le a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - [1 - s_k - a_3(1+s_k)]\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 -\\ -[a_{21}(1-s_k) - a_4]\|\mathbf{y}^k\|^2 + a_5(1+s_k)\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \tag{4.24}$$

где $a_6 = [a_3 + a_{11}(1-s_k) + a_5](1+s_k^{-1})$. Для последнего слагаемого в (4.24) с помощью (4.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k-1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{v}^{k-1}$, $\varepsilon = 4$ получим неравенство $\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{v}^{k-1}\|^2 \le 5\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (5/4)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2$. Пользуясь им в (4.24), придём к неравенству

$$w_k \le a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 - a_7\|\mathbf{y}^k\|^2 - a_8\|\mathbf{x}^k - \mathbf{v}^{k-1}\|^2, \quad k \ge 0, \tag{4.25}$$

где $a_7 = a_{21}(1-s_k) - a_4 - 5a_5(1+s_k)$; $a_8 = 1 - s_k - (a_3 + 5a_5/4)(1+s_k)$.

Заметим, что существует число $N > 1$ такое, что $\forall\, k-1 > N \ge k_0$ с учётом (4.1) наряду с (4.22) выполняются неравенства:

$$\begin{gathered}a_{11}(1-s_k) < a_{11}(1-s_k^2) \le 1/7;\\ a_{21}(1-s_k) \ge 7/12 - \alpha_k;\ a_3(1+s_k) \le 5/6 + 7\alpha_k - s_k;\\ a_5(1+s_k) \le 1/9 + \alpha_k;\ a_5 \le 1/9;\ 0 < \alpha < 1/324.\end{gathered} \tag{4.26}$$

С учетом (4.1), (4.22) и (4.26) в (4.25) для коэффициентов имеют место оценки:

$$\begin{gathered}a_6 \le (5/6 + 6\alpha_k + 1/7 + 1/9)(1+s_k^{-1}) = (23/21 + 6\alpha_k)(1+s_k^{-1});\\ a_7 \ge 7/12 - 4\alpha_k - 5(1/9 + \alpha_k) = 1/36 - 9\alpha_k > 0;\\ a_8 \ge 1 - s_k - 5/6 - 7\alpha_k + s_k - 5(1/9 + \alpha_k)/4 = 1/36 - 33\alpha_k/4 > 0.\end{gathered}$$

Учитывая эти оценки и (4.5), из (4.25) с учётом (4.1), (4.22), (4.23) и (4.26) получим:

$$\begin{gathered}w_k \le a_6\|\mathbf{v}^{k-1} - \mathbf{v}^k\|^2 \le (23/21 + 6\alpha_k)C^2(1+s_k^{-1})\tau_k^{-2}|\tau_{k+1} - \tau_k|^2;\\ u_{k+1} \le (1-s_k)u_k + d_k, \quad k-1 \ge N,\end{gathered} \tag{4.27}$$

где $d_k = w_k + g_1 = C^2(23/21 + 6\alpha_k)(1+s_k^{-1})\tau_k^{-2}|\tau_{k+1} - \tau_k|^2 + 12C^2\beta_k\tau_k/(5m)$. Здесь, ввиду (4.1) и (4.27), имеют место соотношения $\sum_{k=0}^{k=\infty} s_k = \infty$, $d_k/s_k = (w_k + g_1)/s_k \to 0,\ k \to \infty$. Последовательность $\{u_k\}$, обладающая такими свойствами, удовлетворяющая (4.23), (4.27), стремится к нулю (см., например, [21], с. 96). Сходимость $\{u_k\}$ равномерная относительно выбора приближений $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в (2.7), т.к. s_k и d_k в (4.27) не зависят от этих приближений. Отсюда следует равномерная сходимость в (4.8). Из (4.3), (4.7) и (4.8) следует (4.2).

Теорема 1 доказана.

Следствие. Из теоремы 1 следует монотонность сходимости последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ и справедливость неравенств

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \le ... \le \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|,$$

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\| \le \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^{k-2}\| \le ....$$

Примечание 4. В качестве параметров метода (2.4)–(2.7), (4.1), удовлетворяющих условиям теоремы 1, могут быть выбраны, например, следующие:

$$\alpha_k = c_1(1+k)^{-2};\ \beta_k = c_2(1+k)^{-1};\ \tau_k = c_3(1+k)^{-2};\ \delta_k = c_4(1+k)^{-5/2},$$

где числа $c_i > 0$, $i \in [1:4]$; $\quad c_1 \ge c_2 > c_3 > c_4$.

5. Правило останова метода и регуляризующий оператор

Правило останова метода (2.4)-(2.7), (4.1) строим аналогично тому, как это сделано, например, в работах [6] - [12], [14]. Согласно теореме 1, градиент $\nabla f(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$ может быть вычислен в задаче (1.1) в каждой фиксированной точке $\mathbf{x}^0 \in Q$ с некоторой ошибкой δ_k, такой, что $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, и выполняется (2.7). Однако, в конкретных задачах ошибка начальных данных не обязательно стремится к нулю, а обычно больше некоторого фиксированного числа $w > 0$. Предположим, что для каждого фиксированного $\mathbf{x} \in H$, вместо вычисления точного градиента $\nabla f(\mathbf{x})$ возможно вычислить его аппроксимацию $\nabla f_w(\mathbf{x})$ для заданного числа $w > 0$, что

$$\max \|\nabla f_w(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \le w(1 + \|\mathbf{x}\|),\ \mathbf{x} \in H,\ k \ge 0. \tag{5.1}$$

Тогда, заменяя приближённый градиент $\nabla f_k(\mathbf{x})$ в методе (2.4)-(2.7), (4.1) на $\nabla f_w(\mathbf{x})$ из (5.1), вместо (2.4)-(2.5) приходим к методу

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1};\quad \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right);$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left\{\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)[\nabla f_w(\mathbf{z}^k) + \tau_k \mathbf{z}^k]\right\}, k = 0, 1, 2, ..., \tag{5.2}$$

Однако, для метода (5.2) условия (4.1) согласования параметров α_k, β_k, τ_k с параметром погрешности $\delta_k \equiv w > 0$, $k \ge 0$ будут очевидно нарушены, так что процесс (5.2) может расходиться и его использование для больших значений k будет неверно. С помощью теоремы 1 можно построить *правило останова метода* (5.2) и определить количество $k \ge 1$ необходимых итераций для получения приближения $\mathbf{x}^{k+1}$ к нормальному решению $\mathbf{x}^*$ задачи (1.1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$, $\|\mathbf{x}^{k(w)+1} - \mathbf{x}^*\| \le \varepsilon$, при выбранной погрешности $w > 0$. Для этого фиксируем некоторую начальную точку $\mathbf{x}^0 \in H$ и последовательности параметров метода

$$\alpha_k, \beta_k, \tau_k, \delta_k, \tag{5.3}$$

удовлетворяющие условиям (4.1). Могут быть выбраны параметры, указанные выше в примечании и $w < \delta_0$. Поскольку выполнение условий (4.1) здесь не предполагается, то $w = w_k$, $k \geq 0$, теперь является параметром метода (5.2), совершенно не связанным с условиями (4.1). Для каждого фиксированного w, $0 < w < \delta_0$ в (5.1), процесс (5.2) с выбранными параметрами (5.3) будем продолжать до номера итерации $k_0 \geq 1$, определённого из условия

$$\delta_k \geq w,\ k = 0, 1, 2, ..., k(w). \tag{5.4}$$

Так как $\delta_k \to +0$ при $k \to \infty$, $\delta_0 > w$, то требуемый номер итерации $k(w) \geq 1$ будет конечным и найдется для каждого фиксированного $w > 0$. В теореме 2 дается обоснование критерия (5.4) останова процесса (5.2).

Теорема 2. Пусть: 1) выполнены все условия теоремы 1; 2) приближения $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ градиентов $\nabla f(\mathbf{x})$ удовлетворяют условию (5.1); 3) множество точек $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, ..., $\mathbf{x}^{k(w)}$ получено методом (5.2), где номер итерации $k = k(w) \geq 1$ определён в соответствии с правилом останова (5.4). Тогда

$$\|\mathbf{x}^{k(w)} - \mathbf{x}^*\| \to 0 \text{при } w \to +0, \tag{5.5}$$

в том смысле, что для сколь угодно малых заданных $w > 0$, $\varepsilon > 0$ найдется номер $k(w(\varepsilon))$ такой, что $\|\mathbf{x}^{k(w)} - \mathbf{x}^*\| \leq \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях теоремы 2 из (5.1) и правила останова (5.4) следует, что

$$\max \|\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})\| \leq \delta_k(1 + \|\mathbf{x}\|),\ \mathbf{x} \in Q,\ k = 0, 1, 2, ..., k(w). \tag{5.6}$$

Следовательно, $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ из (5.1) и (5.6) удовлетворяет условию (2.7) $\forall\, k = 0, 1, 2, ..., k(w)$. Отсюда с учетом условия $\delta_k \to 0$ имеем, $k(w) \to \infty$ при $w \to +0$, т.е. останов метода будет осуществляться при очень больших номерах k(w).

При условиях теоремы 1 последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$ метода (5.2) сходится по норме H к решению $\mathbf{x}^*$ задачи (1.1), поэтому $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ номер $k(\varepsilon)$, не зависящий от приближенных градиентов $\nabla \mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ в (2.7) и $\mathbf{x}^{k+1}$ из (5.2), такой, что

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\ \forall\, k > k(\varepsilon). \tag{5.7}$$

(Здесь $\varepsilon > 0$ – заданная точность вычисления минимума, т.е. решения задачи (1.1).)

Ввиду соотношения $k(w) \to \infty$ существует число $w(\varepsilon) > 0$ такое, что $k(w(\varepsilon)) > k(\varepsilon)$ $\forall\ w \in (0, w(\varepsilon)]$. Поэтому точки $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, ..., $\mathbf{x}^{k(w)}$ соответствуют, с учетом (5.7), точкам метода (2.4)-(2.7), (4.1) при $\nabla \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$, $k = 1, 2, ..., k(w)$. Поскольку $k(w(\varepsilon)) > k(\varepsilon)$, из (5.7) следует неравенство $\|\mathbf{x}^k(w) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$, которое выполняется $\forall \varepsilon > 0$ и поэтому влечет (5.5). Теорема 2 доказана.

Регуляризующий оператор задачи (1.1) строим способом, аналогичным использованному в работе [14]. Предположим, что погрешность $w > 0$ фиксирована и выполнено правило останова (5.4). Соотношение (5.5) соответствует правилу останова (5.4) и сформулировано для фиксированного уровня ошибки $w > 0$ в (5.1). При таком уровне погрешности в (5.1), выполнении правила останова (5.4) и теоремы 2, регуляризующим будет оператор $\mathbf{R}_w = \mathbf{R}_w\left(\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x}^{k(w)}), w\right)$, сопоставляющий всякому набору своих аргументов, т.е. числу $w \in (0, w(\varepsilon)]$ и приближению $\nabla \mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ градиента функции $f(\mathbf{x})$ из (5.1), точку $\mathbf{x}^{k(w)}$ метода (5.2), (5.4). Входящие в определение регуляризующего оператора $\mathbf{R}_w$, $0 < w \leq w(\varepsilon)$ параметры метода (5.2) удовлетворяют условиям (4.1), (5.1), а в остальном произвольны.

6. Оценка скорости сходимости ПОДКРМ

Оценку скорости сходимости ПОДКРМ (2.4)-(2.7) получим при более строгих предположениях, чем при доказательстве сходимости в теореме 1.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того:

1) функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ сильно выпуклая с константой сильной выпуклости $\kappa > 0$;

2) для параметров α_k, β_k, τ_k, δ_k, метода (2.4)–(2.7) выполнены (4.1) и, кроме того, наряду с выполнением (4.1), существует номер итерации k_2 такой, что при $k \geq k_2 \geq 1$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered} 0 < \alpha_k < 1/4, \ \tau_k < mc_1 - \delta_k, \ \delta_k < mc_1; \\ \beta_k \left[\alpha_k^2 \left(mc_2 + 5mc_1 - 5\delta_k - 5\tau_k\right) + mc_2/5 + 3\delta_k + 11\tau_k/4\right] \leq \\ \leq m\left(7/12 - 2\alpha_k - \alpha_k^2\right); \quad 4\alpha_k < 5\beta_k \left(mc_1 - \delta_k - \tau_k\right)/(6m) < 1 + 4\alpha_k, \\ 0 < \beta_k \left(4mc_2 + 60\delta_k + 55\tau_k\right)/(20m) < 7/12, \end{gathered} \tag{6.1}$$

где $c_1 = 4L\kappa/(L+2\kappa)$; $c_2 = 3(L+2\kappa)$.

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая методом (2.4)–(2.7), (4.1), (6.1), из произвольной начальной точки $\mathbf{x}^0 \in H$, начиная с номера $k \geq k_2$ равномерно относительно выбора приближённых градиентов в (2.7) сходится к решению $\mathbf{x}^*$ задачи (1.1) с оценкой

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \left[q_k \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + g_{1k}\right]^{1/2}, \tag{6.2}$$

где $q_k = 1 + 4\alpha_k - 5\beta_k \left(mc_1 - \delta_k - \tau_k\right)/(6m)$, $0 < q_k < 1$ при условиях (6.1), (4.1); $g_{1k} \to 0$ при $\delta_k \to 0$, $\tau_k \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что ввиду доказанной теоремы 1, в условиях теоремы 3 метод сходится $\forall\, \mathbf{x}^0 \in Q$ равномерно относительно выбора приближённых градиентов из (2.7). Далее, в правой части неравенства (4.19) оценим скалярное произведение с помощью неравенства (см. [21], с. 188)

$$(\nabla\varphi(\mathbf{u}) - \nabla\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{v} - \mathbf{w}) \leq (L+\mu)\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2/4 - L\mu\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2/(L+\mu),$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in Q$, $\mu = 2\kappa$, справедливого для сильно выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}Q$. Полагая здесь $\mathbf{u} = \mathbf{z}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^{k+1}$, и в (4.19) $\mathbf{v}^k = \mathbf{x}^*$, от (4.19) придём к неравенству

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - (1+5\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{11}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ + b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq b_{31}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2 - \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 + \\ + b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 + g_1, \ k \geq 0, \end{gathered} \tag{6.3}$$

где $b_{11} = 7/12 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m$; $b_{21} = \beta\left(mc_1 - \delta - \tau\right)/m$; $b_{31} = \beta(6\delta + 11\tau/2)/m$; $b_{41} = 2\alpha + \alpha^3$; $b_{51} = (L+\mu)\beta/2 = c_2\beta/6$.

В (6.3) сначала оценим квадрат нормы в третьем слагаемом в правой части. Для этого заметим, что в силу следствия теоремы 1 имеют место неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq ...,$$

поэтому

$$-\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq -\alpha\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2. \tag{6.4}$$

Теперь в (6.3) оценим квадраты норм: в четвёртом слагаемом в левой части – с помощью неравенства

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \ \varepsilon > 0,$$

получаемого из (3.4) при $\mathbf{u} = \mathbf{z}^k$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$, $\varepsilon = 6$, тогда

$$b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \geq -5b_{21}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + 5b_{21}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/6; \tag{6.5}$$

в четвёртом слагаемом в правой части – с помощью неравенства

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq (1+\varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (1+\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2,\ \varepsilon > 0$$

, следующего из (4.16) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^k$, полагая в нём $\varepsilon = 5$, то есть

$$b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^{k+1}\|^2 \leq 6b_{51}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + 6b_{51}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5, \tag{6.6}$$

а затем в нём воспользуемся следующим из свойства оператора проектирования неравенством (4.18). Тогда, с учётом оценок (6.4), (6.5), (6.6), от (6.3) придём к неравенству

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - b_1\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq \\ \leq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 + g_1,\ k \geq 0,\end{gathered} \tag{6.7}$$

где $b_1 = 1 + 4\alpha - 5b_{21}/6 = 1 + 4\alpha - 5\beta(mc_1 - \delta - \tau)/(6m)$; $b_2 = b_{11} - 6b_{51}/5 = 7/12 - \beta(3\delta + 11\tau/4)/m - c_2\beta/5$; $b_3 = 2\alpha + \alpha^3 + \alpha^2\beta\left(mc_2 + 5c_1 - 5\delta - 5\tau\right)/m$;
$g_1 = \beta\left[5\delta(1+C)^2 + 12C^2\tau\right]/(5m)$; $b_1 > 0,\ b_2 > 0,\ b_3 > 2\alpha + \alpha^3$ при условиях (4.1), (6.1).

Далее заметим, что для исследуемого метода в силу следствия теоремы 1 имеет место неравенство $\|\mathbf{y}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2$. Воспользуемся этим неравенством, неравенством $b_3 - b_2 < 0$, справедливым при условиях теоремы 3, и, с учётом неравенств $-b_3 > -b_2$, $b_2 \geq b_3 - b_2$, $(b_3 - b_2)\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \geq 0$, последовательно получим:

$$\begin{gathered}0 \geq (b_3 - b_2)\left(\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2\right) = \\ = b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_3\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_2\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \geq \\ \geq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_3 - b_2)\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \geq \\ \geq b_3\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Учитывая оценку (6.8) в (6.7) и упростив, придём к неравенству

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq q_k\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + g_{1k},\ k \geq 0, \tag{6.9}$$

где $q_k = 1 + 4\alpha_k - 5\beta_k\left(mc_1 - \delta_k - \tau_k\right)/(6m)$, $0 < q_k < 1$ при условиях (6.1), (4.1); $g_{1k} \to 0$ при $\delta_k \to 0$, $\tau_k \to 0$. Из (6.9) следует (6.2).

Теорема 3 доказана.

Вывод. Предлагаемый регуляризованный проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод предпочтителен в сравнении со своими предшественниками, поскольку имеет преимущество в точности решения задачи и вычислительной устойчивости.

Список литературы

1. Антипин А.С. Об едином подходе к методам решения некорректных экстремальных задач // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика и механика. – 1973. – № 2. – С. 60-67.

2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

3. Васильев Ф.П. Методы решения неустойчивых экстремальных задач с неточно заданными исходными данными. Дисс. ... д.ф.-м.н. – М., 1985. – 340 с.

4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1989. – 128 с.

5. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. Регуляризация, аппроксимация. – М. 1981. - 400 с.

6. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента второго порядка // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 1994. № 2. С. 3-11.

7. Васильев Ф.П., Недич А. Регуляризованный непрерывный метод проекции градиента третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 12. – С. 2033-2042.

8. Vasiljev F.P., Nedic A. A regularised continuous projection gradient method of the fourth order // Yugoslav J. of Operations research. – 1995. – V. 5. – № 2. – P. 195-209.

9. Малинов В.Г. Регуляризованный проекционный непрерывный метод для задач минимизации с ограничениями // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2002. – № 11. – С. 1646-1656.

10. Васильев Ф.П., Амочкина Т.В., Недич А. Об одном регуляризованном варианте двухшагового метода проекции градиента // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 1996. – № 1. – С. 35-42.

11. Васильев Ф.П., Недич А. О трехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для решения задач минимизации с неточными исходными данными // Изв.вузов. Математика. – 1993. – № 12. – С. 35-43.

12. Васильев Ф.П., Недич А. О четырехшаговом регуляризованном методе проекции градиента для задач минимизации с неточными исходными данными // Mathematica montisnigri. – 1995. – V. 4. – P. 83-101.

13. Рязанцева И.П. Об одном методе итеративной регуляризации для выпуклых задач минимизации // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 2000. – Т. 40. – № 2. – С. 181-187.

14. Малинов В.Г. Четырехпараметрический двухшаговый регуляризованный проекционный метод минимизации // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1999. – Т. 39. – № 4. – С. 567-572.

15. Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы кибернетики. Вычислит. вопросы анализа больших систем. – М.: Научн. совет по комплексн. проблеме "Кибернетика"АН СССР, 1989. – С. 5-43.

16. Амочкина Т.В., Антипин А.С., Васильев Ф.П. Регуляризованный непрерывный метод минимизации с переменной метрикой при неточно заданных исходных данных // Вестник МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 1996. – № 4. – С. 5-11.

17. Малинов В.Г. О регуляризованном непрерывном проекционном методе минимизации с переменной метрикой и его итеративном аналоге // Труды СВМО. – 2006. – Т. 8. – № 1. – С. 263-271.

18. Малинов В.Г. Регуляризованный проекционный двухшаговый метод второго порядка с переменной метрикой для задач минимизации с ограничениями // Математическое программирование: Труды 13-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их применения". – Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. – Том 1. – С. 245-251.

19. Malinov V.G. On regularized projection two-step variable metric minimization method // 5th Moscow International Conference on Operations Research (ORM2007). Moscow. April 10-14, 2007. Proceedings. – Moscow. MAKS Press, 2007. – P. 171-173.

20. Малинов В.Г. О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата // Журнал СВМО. – 2010. – Т. 12. – № 4. – С. 37-48.

21. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1988.– 552 с.

22. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

On version of regularized projection two-step two-stage quasinewton minimization method

© V. G. Malinov [2]

Abstract. In the work regularized method for solving minimization problems with inaccurate initial date on the convex closed set of separable Gilbert variable metric space, based on the new version of projection generalised two-step two-stage Quasinewton method in conjunction with the Tikhonov function method is proposed. For continuously differentiable convex functions with a Lipschitz gradients the convergence of the method and estimates of the rate of convergence of the method on the supplementary requirement of strongly convexity functions are proved. Stop rule is constructed and regularizing operator is described. Distinction of the proposed method from preceding method of the considering class is superior accuracy also calculating stability.

Key Words: minimization on the simple set, regularized projection generalized two-step two-stage, variable metric method, convergence, rate of convergence.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.