

УДК 517.958

Численный метод для моделирования малых поперечных колебаний тонких упругих пластин

© А. А. Кулешов¹

Аннотация. Рассматривается численный метод для решения задачи о малых поперечных колебаниях тонких упругих пластин переменной толщины с заданными на контуре пластины изгибающим моментом и перерезывающей силой. Приведены результаты расчетов колебаний плавающего на воде ледяного покрова под действием техногенных динамических нагрузок.

Ключевые слова: модель тонкой упругой пластины, численный метод, результаты расчетов

Введение

Задача о поперечных колебаниях тонких упругих пластин имеет практические приложения в различных областях науки и техники. В частности, она применима к задаче о колебаниях ледяного покрова на поверхности воды при воздействии различных динамических нагрузок [1] и к задаче о поперечных колебаниях океанических литосферных плит [2]. Применима она также к задаче об определении прочности материала пластины на изгиб. Однако, несмотря на достаточно широкие приложения, численные методы решения для этой задачи ранее были разработаны недостаточно. В работе рассматривается предложенный автором численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на сведении исходной начально-краевой задачи к задаче для системы уравнений первого порядка по времени с аппроксимацией этой системы неявной двухслойной разностной схемой.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую упругую изотропную пластину переменной толщины $h(x, y)$, лежащую на упругом винклеровском основании и совершающую малые поперечные колебания под действием начального отклонения или внешней силы. Задача о колебаниях такой пластины с общими условиями на криволинейном контуре имеет вид [3]

$$\rho h W_{tt} + \Delta(D\Delta W) - (1 - \sigma)(D_{yy}W_{xx} - 2D_{xy}W_{xy} + D_{xx}W_{yy}) + aW = F, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.1)$$

граничные условия на криволинейном контуре пластины:

$$-D\Delta W - D(1 - \sigma) [\sin 2\theta W_{xy} - \sin^2 \theta W_{xx} - \cos^2 \theta W_{yy}] = M_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (1.2)$$

$$-\frac{\partial(D\Delta W)}{\partial \mathbf{n}} - (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial l} \{D [\sin \theta \cos \theta (W_{yy} - W_{xx}) + \cos 2\theta W_{xy}]\} + \quad (1.3)$$

$$+(1 - \sigma) [\sin \theta D_y W_{xx} + \cos \theta D_x W_{yy} - (\sin \theta D_x + \cos \theta D_y) W_{xy}] = N_\Gamma, \quad (x, y) \in \Gamma,$$

¹Главный научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; kuleshov@imamod.ru.

где $W(x, y, t)$ — поперечный прогиб пластины, отсчитываемый по оси OZ , направленной вниз от срединной плоскости, совмещенной с плоскостью XY и разделяющей толщину пластины $h(x, y)$ пополам, ρ — плотность материала пластины, $D = Eh^3/[12(1 - \sigma^2)]$ — жесткость пластины при изгибе (цилиндрическая жесткость), E — модуль упругости, σ — коэффициент Пуассона материала пластины, \mathbf{n} — внешняя нормаль к контуру Γ , \mathbf{l} — касательная к контуру, θ — угол между нормалью \mathbf{n} и положительным направлением оси OX , aW — реакция упругого основания, F — внешняя сила, действующая на поверхности пластины, M_Γ — изгибающий момент и N_Γ — перерезывающая сила, заданные на контуре пластины.

Начальные условия:

$$W|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad W_t|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (1.4)$$

2. Описание численного метода

Уравнение (1.1) можно записать в другой форме

$$\rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \quad (2.1)$$

где M_x, M_y — изгибающие моменты, M_{xy} — крутящий момент

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = (1 - \sigma) D \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Уравнение (2.1) с помощью замены переменных $S = W_t$, сводится к системе уравнений с первым порядком по времени, неизвестными в которой являются поперечный прогиб пластины, скорость прогиба и изгибающие моменты:

$$\rho h \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - aW + F, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\sigma D \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - D \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = S, \quad (2.5)$$

и для нее выписываются соответствующие граничные условия.

Для исходной области Ω рассматривается прямоугольная сетка $\omega_h = \{(x_i, y_j), i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}\}$ и вводятся разностные аналоги $w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n, h_{ij}, D_{ij}, f_{ij}^n$ функций $W, S, M_x, M_y, M_{xy}, h, D, F$ соответственно. На сетке ω_h для системы (2.2-2.5) балансным методом строится неявная двухслойная разностная схема [4]

— внутренняя ячейка

$$\rho h_{ij} s_{t,ij}^n = u_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - 2r_{\circ\circ,xy,ij}^{n+1/2} + v_{\bar{y},ij}^{n+1/2} - a w_{ij}^{n+1/2} + f_{ij}^{n+1/2},$$

$$u_{t,ij}^n = -D_{ij} s_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - \sigma D_{ij} s_{\bar{y},ij}^{n+1/2}, \quad v_{t,ij}^n = -\sigma D_{ij} s_{\bar{x},ij}^{n+1/2} - D_{ij} s_{\bar{y},ij}^{n+1/2};$$

— краевая левая ячейка

$$\rho h_{1j} s_{t,1j}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,1j}^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta x} r_{y,3/2,j}^{n+1/2} + v_{yy,1j}^{n+1/2} - aw_{1j}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}j}}^{n+1/2}}{\Delta x} + f_{1j}^{n+1/2},$$

$$u_{1j}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}j}}^{n+1}, \quad v_{t,1j}^n = -(1 - \sigma^2) D_{1j} s_{yy,1j}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{L}t,j}}^n;$$

— краевая правая ячейка

$$\rho h_{N1j} s_{t,N1j}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x},N1j}^{n+1/2} + \frac{2}{\Delta x} r_{y,N1-1/2,j}^{n+1/2} + v_{yy,N1j}^{n+1/2} - aw_{N1j}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{R}j}}^{n+1/2}}{\Delta x} + f_{N1j}^{n+1/2},$$

$$u_{N1j}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{R}j}}^{n+1}, \quad v_{t,N1j}^n = -(1 - \sigma^2) D_{N1j} s_{yy,N1j}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{R}t,j}}^n;$$

— краевая верхняя ячейка

$$\rho h_{i1} s_{t,i1}^n = u_{\bar{x},i1}^{n+1/2} - \frac{2}{\Delta y} r_{x,i,3/2}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,i1}^{n+1/2} - aw_{i1}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}^i}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{i1}^{n+1/2},$$

$$u_{t,i1}^n = -(1 - \sigma^2) D_{i1} s_{\bar{x},i1}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{G}^t,i}}^n, \quad v_{i1}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}^i}}^{n+1};$$

— краевая нижняя ячейка

$$\rho h_{iN_2} s_{t,iN_2}^n = u_{\bar{x},iN_2}^{n+1/2} + \frac{2}{\Delta y} r_{x,i,N_2-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{y,iN_2}^{n+1/2} - aw_{iN_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{H}^i}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{iN_2}^{n+1/2},$$

$$u_{t,iN_2}^n = -(1 - \sigma^2) D_{iN_2} s_{\bar{x},iN_2}^{n+1/2} + \sigma M_{\Gamma_{\mathcal{H}^t,i}}^n, \quad v_{iN_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{H}^i}}^{n+1};$$

— угловая верхняя левая ячейка

$$\rho h_{11} s_{t,11}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,11}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,11}^{n+1/2} - aw_{11}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}1}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}1}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{11}^{n+1/2},$$

$$u_{11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}1}}^{n+1}, \quad v_{11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}1}}^{n+1};$$

— угловая нижняя левая ячейка

$$\rho h_{1N_2} s_{t,1N_2}^n = \frac{1}{\Delta x} u_{x,1N_2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{y,1N_2}^{n+1/2} - aw_{1N_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{L}N_2}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{H}1}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{1N_2}^{n+1/2},$$

$$u_{1N_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{L}N_2}}^{n+1}, \quad v_{1N_2}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{H}1}}^{n+1};$$

— угловая верхняя правая ячейка

$$\rho h_{N11} s_{t,N11}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x},N11}^{n+1/2} + \frac{1}{\Delta y} v_{y,N11}^{n+1/2} - aw_{N11}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{R}N1}}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma_{\mathcal{G}N1}}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{N11}^{n+1/2},$$

$$u_{N11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{R}N1}}^{n+1}, \quad v_{N11}^{n+1} = M_{\Gamma_{\mathcal{G}N1}}^{n+1};$$

— угловая нижняя правая ячейка

$$\rho h_{N_1 N_2} s_{t, N_1 N_2}^n = -\frac{1}{\Delta x} u_{\bar{x}, N_1 N_2}^{n+1/2} - \frac{1}{\Delta y} v_{\bar{y}, N_1 N_2}^{n+1/2} - a w_{N_1 N_2}^{n+1/2} + \frac{N_{\Gamma np}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{N_{\Gamma \mathcal{H} N_1}^{n+1/2}}{\Delta y} + f_{N_1 N_2}^{n+1/2},$$

$$u_{N_1 N_2}^{n+1} = M_{\Gamma np}^{n+1}, \quad v_{N_1 N_2}^{n+1} = M_{\Gamma \mathcal{H} N_1}^{n+1};$$

аппроксимация последнего уравнения системы (2.5) для всех ячеек имеет вид

$$w_{t, ij}^n = s_{ij}^{n+1/2}.$$

Заданы $\rho, a, D_{ij}, h_{ij}, f_{ij}^n, (i, j) \in \omega_h, M_{\Gamma ij}^n, N_{\Gamma ij}^n, (i, j) \in \Gamma_h; w_{ij}^0, s_{ij}^0, u_{ij}^0, v_{ij}^0, r_{ij}^0, f_{ij}^0, M_{\Gamma ij}^0, N_{\Gamma ij}^0$.

В приведенной аппроксимации используются обозначения

$$\Phi_{ij}^{n+1/2} = (\Phi_{ij}^{n+1} + \Phi_{ij}^n)/2, \quad \Phi_{ij}^n = (w_{ij}^n, s_{ij}^n, u_{ij}^n, v_{ij}^n, r_{ij}^n, f_{ij}^n, N_{\Gamma ij}^n)^T,$$

а также стандартные обозначения разностных производных [5].

Полученная разностная схема значительно проще для численной реализации, чем громоздкая трехслойная разностная схема, которая получилась бы при непосредственной разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения. Для решения системы разностных уравнений применялся метод расщепления по пространственным переменным.

3. Сходимость разностных аппроксимаций

В исходной задаче функции $F, M_{\Gamma}, N_{\Gamma}$ могут быть разрывными, и, в силу этого, решения задачи (1.1)–(1.4) рассматриваются как обобщенные решения из соответствующих функциональных пространств. Для разработанного метода в [6] была доказана сильная сходимость решения разностной задачи к обобщенному решению исходной начально-краевой задачи и получена оценка скорости сходимости. При условии, что входные данные $f_{ij}^n, M_{\Gamma ij}^n, N_{\Gamma ij}^n$ в разностной задаче аппроксимируют соответствующие функции исходной задачи с порядком не ниже $O((\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2})$, решения разностной задачи сходятся к обобщенному решению дифференциальной задачи со скоростью $O((\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2})$ и оценка скорости сходимости имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| [s_{ij}^n - W_{t, ij}^n] \right\|_{L_2(L_2(\omega_h))} + \left\| [w_{ij}^n - W_{ij}^n] \right\|_{L_2(H^2(\omega_h))} \leq (\Delta t + \Delta x + \Delta y)^{1/2} C \left(\left\| F \right\|_{H^1(0, T; L_2(\Omega))} + \right. \\ & + \left\| M_{\Gamma} \right\|_{H^2(0, T; L_2(\Gamma))} + \left\| N_{\Gamma} \right\|_{H^2(0, T; L_2(\Gamma))} + \left\| M_{\Gamma} \right\|_{H^1(0, T; H^{3/2}(\Gamma))} + \left\| N_{\Gamma} \right\|_{H^1(0, T; H^{1/2}(\Gamma))} + \\ & + \left\| \varphi \right\|_{H^4(\Omega)} + \left\| \psi \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| [f_{ij}^n] \right\|_{H^1(L_2(\omega_h))} + \left\| [M_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \left\| [N_{\Gamma ij}^n] \right\|_{H^2(L_2(\Gamma_h))} + \\ & + \left\| [u_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [v_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [r_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} + \left\| [w_{ij}^0] \right\|_{L_2(\omega_h)} + \left\| [s_{ij}^0] \right\|_{H^2(\omega_h)} \Big). \end{aligned}$$

4. Результаты расчетов

Для численной реализации разработанного метода автором совместно с В.В.Мымриным был создан программный комплекс, с помощью которого были проведены расчеты некоторых прикладных задач, описываемых моделью тонких упругих пластин. В качестве иллюстрации работы метода приведем результаты расчетов волновой динамики плавающего на воде ледяного покрова при посадке тяжелых транспортных самолетов на ледовые аэродромы в Антарктиде. При этом была также численно исследована прочность ледяного покрова под действием возникающих напряжений.

В расчетах рассматривался ледяной покров с линейными размерами $2500 \text{ м} \times 250 \text{ м}$. Размеры сетки — 5000×500 узлов при одинаковых шагах сетки $\Delta x = \Delta y = 0.5 \text{ м}$ — позволили учитывать давление на лед каждого колеса шасси самолета. Значения физических параметров ледяного покрова: модуль упругости $E = 5 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$, коэффициент Пуассона $\sigma = 0.33$, прочность льда на растяжение $0.5\text{--}1,0 \text{ МПа}$, прочность льда на сжатие $2\text{--}3 \text{ МПа}$. В качестве критериев разрушения льда выбирались минимальные значения прочности на растяжение и сжатие. Моделировалась задача о колебаниях ледяного покрова постоянной толщины со свободным краем ($M_\Gamma = 0$, $N_\Gamma = 0$). Результаты расчета значений прогиба (см. рис.1 слева) сравнивались с результатами моделирования посадки самолета C130 на ледовый аэродром McMurdo Sound в Антарктиде, полученными в работе канадских ученых [7] на основе аналитического метода решения и аппроксимации полученного интеграла квадратурной формулой. Максимальная расчетная величина прогиба составила 1.3 мм , а в работе [7] приблизительно 3.5 мм . Однако можно утверждать, что результаты, полученные с помощью предложенного метода точнее, так как более точно задается нагрузка на лед при посадке самолета, как по форме задания, так и по распределению нагрузки по площади. Так, в рассматриваемом методе с шагами сетки 0.5 м учитывается реальная нагрузка и от передних, и от задних стоек шасси, а в работе [7] нагрузка задается грубо с помощью δ -функции вида $P\delta(x - vt)$, и равномерно распределена на площади $1.5 \text{ м} \times 2.5 \text{ м}$.

В ходе численных экспериментов было также проведено исследование предельной толщины ледяного покрова, при которой не происходит его разрушения. На рис. 1 справа виден локальный максимум напряжений от давления передней стойки шасси самолета и глобальный — от задних стоек. Для самолета C-130H Hercules массой 50 т минимальная толщина льда, при которой минимальные значения прочности на растяжение и сжатие не достигались, равна 1.7 м .

Заключение

Разработанный и обоснованный численный метод решения рассматриваемой задачи и созданная компьютерная программа позволяют моделировать волновую динамику поперечных колебаний тонких упругих пластин, а также делать выводы о возможности разрушения материала пластин под действием возникающих напряжений.

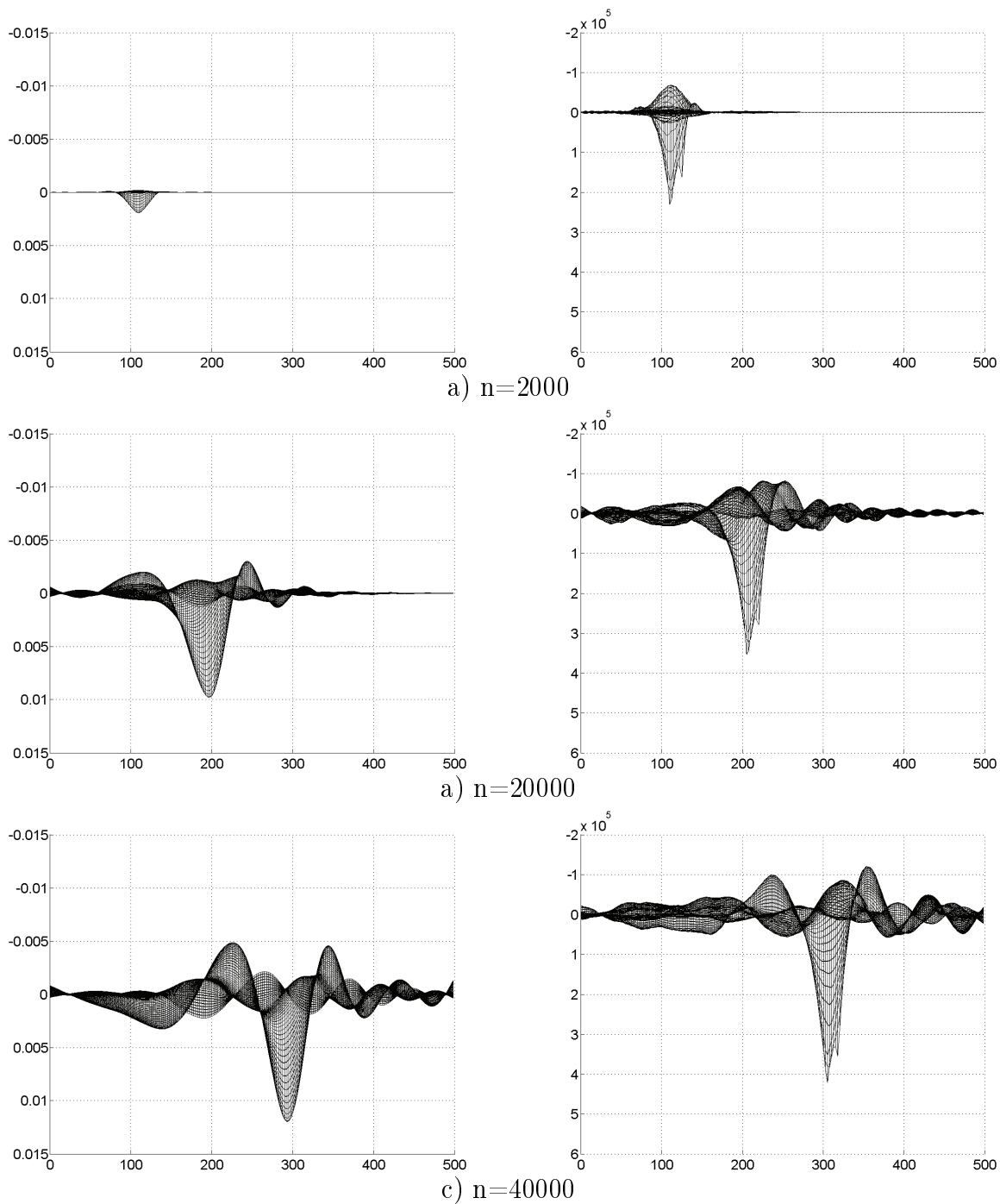


Рис. 1: Результаты расчета значений поперечных прогибов льда W [м] (слева) и нормальной компоненты тензора напряжений σ_{xx} [Па] (справа) при посадке самолета С-130 (в разрезе по направлению движения центра масс). Параметры расчета: масса самолета — 50 т; начальная скорость — 50 м/с; толщина льда — 2.5 м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
2. Тёркот Д., Шуберт Дж. Геодинамика. – М.: Мир, 1985, Т.1.
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматлит, 1963.
4. Кулешов А.А. О численном методе решения задачи поперечных колебаний тонких упругих пластин // Матем. моделирование, 2005. – Т. 17, № 4. – С. 11-26.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
6. Кулешов А.А., Мырзин В.В., Разгулин А.В. О сильной сходимости разностных аппроксимаций в задаче поперечных колебаний тонких упругих пластин // ЖВМ и МФ, – 2009. – Т. 49, № 1. – С.152-177.
7. Milinazzo F., Shinbrot M., Evans N.W. A mathematical analysis of the steady response of floating ice to the uniform motion of a rectangular load // J.Fluid Mech, – 199. – Vol. 287. – P.173-197.

Numerical method for modeling of small transverse vibrations in thin elastic plates

© A.A. Kuleshov²

Abstract. The numerical method for problem of small transverse vibrations in a thin elastic plates of variable thickness with a bending moment and a shearing force on the plate contour is considered. The results of numerical simulation of floating ice vibrations caused by moving loads are shown.

Key Words: model of a thin elastic plate, numerical method, results of numerical simulation

²Main Researcher of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; kuleshov@imamod.ru.