УДК 519.22

О нестандартных методах оценивания в моделях авторегрессии в неустойчивых случаях

© А. Н. Старцев[1], Т. С. Мирзаев[2]

Аннотация. В докладе предлагаются оценки параметров авторегрессии, отличные от оценок наименьших квадратов. Оценки наименьших квадратов в неустойчивых (критических) случаях, т.е. когда корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности, имеют, как правило, сложное предельное распределение. Предлагаемые же нестандартные оценки в большинстве критических случаев имеют более простое предельное распределение.
Ключевые слова: обыкновенная авторегрессии первого порядка, одновременная авторегрессия первого порядка, пространственная (spatial) авторегрессия первого порядка, обыкновенная авторегрессия второго порядка, оценка параметров, нестандартный подход, предельные распределения.

1. Введение

В докладе предлагаются нестандартные подходы к построению оценок в различных моделях авторегрессии. Уравнения оценивания строятся с использованием рекуррентных связей, задающих исходный процесс и в каждом из рассматриваемых случаев отдельно. Схожим способом можно строить и классические оценки наименьших квадратов, т.е. не опираясь на метод минимизации соответствующей суммы квадратов по исходным параметрам.

Необходимость построения такого типа оценок связана с тем, что оценки наименьших квадратов в критических случаях имеют сложное предельное распределение, выражающееся, как правило, через функционалы от стандартного винеровского процесса.

С точки зрения приложений именно критические случаи представляют значительный интерес. В связи с этим, например, в случае обыкновенной авторегрессии первого порядка, т.е. когда $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, было уделено большое внимание вопросу табулирования сложного предельного распределения. Если модели обыкновенной авторегрессии представляют большой интерес для экономистов (прогнозирование урожайности и т.п.), то модели одновременной авторегрессии, т.е. когда $X_t = \alpha X_{t-1} + \beta X_{t+1} + \varepsilon_t$ и модели пространственной авторегрессии, т.е. когда $X_{t,s} = \alpha X_{t-1,s} + \beta X_{t,s-1} + \varepsilon_{t,s}$ представлений интерес в геологии, сельском хозяйстве и в частности при обработке спутниковых изображений поверхности Земли с точки зрения прогноза аномальных явлений. Следует также отметить, что модели пространственной авторегрессии начали интенсивно исследоваться лишь в последние 2 десятилетия. Более подробную историю вопроса, в сравнении с приведенной здесь, по каждой из рассматриваемых моделей можно почерпнуть в соответствующих ссылках на литературные источники.

[1]Профессор, филиал Российского Экономического Университета им. Г.В.Плеханова в г. Ташкенте, e-mail: anstartsev@gmail.com.

[2]Мл. научн. сотр., Институт математики и информационных технологий АНРУз., Ташкент, e-mail: tsmirzaev@mail.ru.

2. Модели одномерной авторегрессии первого порядка.

Рассматривается модель авторегрессии первого порядка

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ..., \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...-$ независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с $E\varepsilon_1 = 0, \ \ E\varepsilon_1^2 = 1, \ \ X_0-$ начальное состояние.

Известная оценка параметра α, полученная по n наблюдениям методом наименьших квадратов имеет вид

$$\widehat{\alpha}_n = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} X_{t-1}X_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} X_{t-1}^2}. \tag{2.2}$$

Если $\{\varepsilon_i\}$ нормально распределены, то оценка (2.2) совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Сложная структура оценка $\widehat{\alpha}_n$ затрудняет нахождение предельного распределения даже в случае нормально распределенных шумов $\{\varepsilon_i\}$. Известно (см [1], [2]), что $\sqrt{n}\left(\widehat{\alpha}_n - \alpha\right)$ имеет нормальное предельное распределение при $\alpha \in (-1, \ 1)$, а для $|\alpha| \geq 1$ предельное распределение является сложным и более того при $|\alpha| > 1$ оно становится зависящим от распределения шумов $\{\varepsilon_i\}$. Например, при $\alpha = 1$ имеет место утверждение (см [2], [3]): при $n \to \infty$

$$n\left(\widehat{\alpha}_n - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(w^2(1) - 1\right) \Big/ \int\limits_0^1 w^2(t)dt,$$

где $w(t)-$ стандартный винеровский процесс, а символ $\Rightarrow$ означает слабую сходимость соответствующих распределений.

В работе [4] была предложена другая, более простая по структуре, оценка параметра α. Простое суммирование (2.1) по t от k до n приводит к следующей оценке

$$\alpha_{nk}^* = \frac{X_k + ... + X_n}{X_{k-1} + ... + X_{n-1}} = \alpha + \frac{\varepsilon_k + ... + \varepsilon_n}{X_{k-1} + ... + X_{n-1}}. \tag{2.3}$$

Показано, что при $n \to \infty$

$$P\left(n\alpha(c)\left(\alpha_{n,k}^* - 1\right) < x\right) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\left[(x-\rho)\Big/\sqrt{1-\rho^2}\right],$$

где $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{n} < 1, \quad \alpha(c) = \sqrt{(1-c)(1+2c)/3}, \quad \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{3(1-c)}{1+2c}\right)^{1/2}$.
Если же $c = 1$, то

$$P\left(\sqrt{k(n-k)}\left(\alpha_{n,k}^* - 1\right) < x\right) \Rightarrow \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+u^2}du.$$

Заметим, что в случае $\alpha = -1$ какие-либо результаты отсутствуют. Принцип инвариантности, использованный при исследовании оценки (2.2) в работе [2], при $\alpha = -1$ результата не даёт,а что касается оценки (2.3), то она в этом случае является несостоятельной.

В настоящей работе предлагается несколько другая оценка, имеющая в случае $\alpha = -1$ предельное распределение, аналогичное приведенному выше.

Для $\alpha = -1$ уравнение оценивания составим путем суммирования соотношения (2.1) по t от k до $2n$, предварительно умноженного на $(-1)^{t-1}$

$$\sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} X_t = \alpha \sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} X_{t-1} + \sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} \varepsilon_t$$

или в сокращенном виде

$$\bar{X}_{2n,k} = \alpha \bar{X}_{2n-1,k} + E_{2n,k}. \tag{2.4}$$

Решая уравнение (2.4) без учёта $E_{2n,k}$, получим оценку

$$\alpha^*_{2n,k} = \bar{X}_{2n,k} \big/ \bar{X}_{2n-1,k}.$$

Теперь из (2.4) найдем отклонение

$$\alpha^*_{2n,k} - \alpha = \frac{E_{2n,k}}{\bar{X}_{2n-1,k}}. \tag{2.5}$$

Т е о р е м а 2.1. *Если* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...-$ *н. о. р. с. в. с* $E(\varepsilon_1) = 0, \quad E(\varepsilon_1^2) = 1$ *и* $X_0 = 0$, *то при* $n \to \infty$ *в случае* $\alpha = -1$

$$P\left(n\alpha(c)\left(\alpha^*_{2n,k} - \alpha\right) < x\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{du}{u^2 - 2\rho u + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

где $c = \lim(k/n), \quad \alpha(c) = \sqrt{2(2-c)(1+c)/3}, \quad \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{3(2-c)}{2(1+c)}\right)^{1/2}.$

С л е д с т в и е 2.1. *Если* $k \to \infty$ *и* $n \to \infty$ *так, что* $c = 2$, *то*

$$P\left(\sqrt{(k-1)(2n-k)}\left(\alpha^*_{2n,k} - \alpha\right) < x\right) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{du}{1+u^2}.$$

3. Модели одномерной одновременной авторегрессии первого порядка с одним параметром.

Рассматривается следующая модель одновременной авторегрессии

$$X_k^{(n)} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + \varepsilon_k, & k = 1, 2, ..., n-1, \\ X_0^{(n)}; \quad X_n^{(n)}, & \textit{заданные с.в.}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\alpha-$ неизвестный параметр, $\{\varepsilon_k, \ k = 1, 2, ..., n-1\}-$ независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией равной единице.

Процесс (3.1) является устойчивым в случае, когда $|\alpha| < 1/2$, неустойчивым при $|\alpha| = 1/2$ и относится к взрывному типу при $|\alpha| > 1/2$.

Традиционная оценка параметра в модели (3.1) строится по методу наименьших квадратов. Эта оценка имеет достаточно сложную структуру и в неустойчивом случае имеет предельное распределение, выражающееся через функционалы от винеровского процесса. Целью работы авторов [5] было получение асимптотического распределения оценки наименьших квадратов $\hat{\alpha}_n$ параметра α по наблюдениям, $\left\{X_k^{(n)},\ k=1,2,...,n-1\right\}$, которая имеет вид:

$$\hat{\alpha}_n=\left(\sum_{k=1}^{n-1}X_k^{(n)}\left(X_{k-1}^{(n)}+X_{k+1}^{(n)}\right)\right)\Bigg/\left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(X_{k-1}^{(n)}+X_{k+1}^{(n)}\right)^2\right).$$

Основой для получения предельного распределения оценки $\hat{\alpha}_n$ является следующее представление $X_k^{(n)}$ через $\varepsilon_1,...,\varepsilon_{n-1}$.

Т е о р е м а 3.1. *Если* $\alpha=\pm 1/2$, *то*

$$X_k^{(n)}=(\pm 1)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)X_0^{(n)}+(\pm 1)^k\frac{k}{n}X_n^{(n)}+$$

$$+2\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{l=1}^{k-1}(\pm 1)^{k+l}\,l\varepsilon_l+2\frac{k}{n}\sum_{l=k}^{n-1}(\pm 1)^{k+l}(n-l)\,\varepsilon_l. \tag{3.2}$$

При получении предельного распределения для простоты предполагается, что $X_0^{(n)}=X_n^{(n)}=0$.

Т е о р е м а 3.2. *Если* $\{\varepsilon_k,\ k\in N\}$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины с* $E\varepsilon_1=0$, $E(\varepsilon_1)^2=1$ *и* $E(\varepsilon_1)^8<\infty$, *то в случае* $\alpha=1/2$ *при* $n\to\infty$

$$n^2(\hat{\alpha}_n-\alpha)\Rightarrow\frac{\int\limits_0^1\chi_t dw_t}{2\int\limits_0^1(\chi_t)^2dt},$$

где $(w_t)_{t\in[0,1]}$ *– стандартный винеровский процесс и*

$$\chi_t=2(1-t)\int\limits_0^t s dw_s+2t\int\limits_t^1(1-s)\,dw_s,\quad t\in[0,1].$$

Следует отметить, что в случае $\alpha=-1/2$ какой-либо результат в работе [5] отсутствует.

В настоящей работе предлагаются оценки более простой структуры, имеющие более простое предельное распределение в неустойчивом случае и в том числе при $\alpha=-1/2$, причем в случаях $\alpha=1/2$ и $\alpha=-1/2$ оценки строится по-разному.

В случае $\alpha=1/2$ уравнение оценивания составим путем суммирования (3.1) по k от 1 до n-1

$$\sum_{k=1}^{n-1}X_k^{(n)}=\alpha\sum_{k=1}^{n-1}\left(X_{k-1}^{(n)}+X_{k+1}^{(n)}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k$$

или в сокращенном виде

$$X_n=\alpha Y_n+Z_n. \tag{3.3}$$

Решая уравнение (3.3) без учёта Z_n, получим оценку

$$\alpha_n^*=X_n/Y_n.$$

Теперь из (3.3) найдем отклонение

$$\alpha_n^* - \alpha = \frac{Z_n}{Y_n}. \tag{3.4}$$

В случае $\alpha = -1/2$ уравнение оценивания составим путем суммирования соотношения (3.1) по k от 1 до n-1, предварительно умноженного на $(-1)^k$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k X_k^{(n)} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \varepsilon_k$$

или в сокращенном виде

$$\tilde{X}_n = \alpha \tilde{Y}_n + \tilde{Z}_n. \tag{3.5}$$

Решая уравнение (3.5) без учёта $\tilde{Z}_n$, получим оценку $\tilde{\alpha}_n = \tilde{X}_n \Big/ \tilde{Y}_n$ и её отклонение

$$\tilde{\alpha}_n - \alpha = \frac{\tilde{Z}_n}{\tilde{Y}_n}. \tag{3.6}$$

Для простоты мы также предполагаем, что $X_0^{(n)} = X_n^{(n)} = 0$ и тогда для построенных оценок имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть* $\{\varepsilon_k,\ k = 1, 2, ..., n-1\}$ *-н.о.р.с.в. с* $E(\varepsilon_k) = 0$ *и* $E(\varepsilon_k)^2 = 1$.

1. Если $\alpha = 1/2$, *то при* $n \to \infty$

$$\sigma n^2 (\alpha_n^* - \alpha) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2};$$

2. Если $\alpha = -1/2$, *то при* $n \to \infty$

$$\sigma n^2 (\tilde{\alpha}_n - \alpha) \Rightarrow -\frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где $\sigma^2 = 2/15$, *а* $(\xi_1,\ \xi_1) -$ *нормальный случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей* $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5/24} \\ \sqrt{5/24} & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в сформулированной теореме предельное распределение оценки α_n^* существенно проще чем в теореме 3.2 и при этом существенно ослаблены моментные ограничения на случайные величины $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$, а результат в случае $\alpha = -1/2$ аналогов не имеет.

4. Модели пространственной авторегрессии первого порядка с одним параметром.

Рассматривается следующая модель авторегрессии на целочисленной решетке плоскости Z^2

$$X_{k,l} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1,l} + X_{k,l-1}) + \varepsilon_{k,l}, & \text{\textit{если}} \quad k, l \geq 1 \\ 0, & \text{\textit{в остальных случаях}}, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\{\varepsilon_{k,l} : (k,l) \in Z, k, l \geq 1\} -$ н.с.в.
с $E(\varepsilon_{k,l}) = 0$, $E\left(\varepsilon_{k,l}^2\right) = 1$.

Модели пространственной авторегрессии стали изучаться сравнительно недавно и они находят применение в различных областях таких, как география, геология, биология, сельское хозяйство, а также при анализе спутниковых изображений поверхности Земли. Дискуссию по этим применениям см. в работе [6].
Процессы вида (4.1) являются устойчивыми (асимпточескиi стационарными) в случае, когда $|\alpha| < 1/2$, неустойчивыми (критическими) при $|\alpha| = 1/2$ и относятся к взрывному типу при $|\alpha| > 1/2$. Такие процессы, определенные на одномерной решетке Z^1 ведут себя примерно также, но в роли критических значений выступают $\alpha = \pm 1$.

Для традиционной оценки наименьших квадратов $\hat{\alpha}_{m,n}$, построенной по наблюдениям из $R_{m,n} = \{X_{k,l} : 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant l \leqslant n\}$ в работе [7] была доказана её асимптотическая нормальность при $m, n \to \infty$ как в устойчивом, так и в критическом случаях в предположении, что $E\left(\varepsilon_{k,l}^4\right)$ равномерно ограничены по $k, l \geqslant 1$.

В данной работе предлагается оценка более простой структуры и использующая только часть наблюдений, расположенных вдоль диагонали в прямоугольнике $R_{m,n}$. Такой подход с существенным сокращением числа наблюдений является актуальным в задачах геологии и некоторых других областях применения моделей пространственной авторегрессии.

Пусть для простоты $m = n$. Оценку будем строить основываясь на наблюдениях, расположенных вдоль диагонали квадрата $R_{n,n} = \{X_{k,l} : 1 \leqslant k \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant n\}$. В соответствии с (4.1) эти наблюдения удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$X_{k,k} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1,k} + X_{k,k-1}) + \varepsilon_{k,k}, & \textit{если} \quad k \geq 1 \\ 0, & \textit{в остальных случаях}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Суммируя (4.2) по k от 1 до n, получим уравнение оценивания

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k,k} = \alpha \sum_{k=1}^{n} (X_{k-1,k} + X_{k,k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,k}.$$

Разделив обе части полученного уравнения на коэффициент при α, получим

$$\alpha_n^* - \alpha = Z_n / Y_n, \tag{4.3}$$

где $Z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,k}$, $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (X_{k-1,k} + X_{k,k-1})$, $\alpha_n^* = X_n / Y_n$ - предлагаемая оценка параметра α, а $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_{k,k}$.

Для построенной оценки имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если $\{\varepsilon_{i,j} : i, j \geqslant 1\}-$ н.о.р.с.в. с $E(\varepsilon_{i,j}) = 0$ и $E(\varepsilon_{i,j})^2 = 1$, то при $n \to \infty$ в критическом случае $(\alpha = \pm 1/2)$*

$$2\sigma^{-1} n^{3/4} (\alpha_n^* - \alpha) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2} sign\alpha,$$

где $\sigma^2 = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \left(7 + 8\sqrt{2}\right)$, а ξ_1 и ξ_2- независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

5. Модели одномерной авторегрессии второго порядка.

Наблюдается процесс авторегрессии второго порядка

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \qquad t = 1, 2, \ldots n, \tag{5.1}$$

где a_1, a_2 – неизвестные параметры, ε_1, ..., ε_n – «шумы», образующие последовательность независимых случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что $y_{-1} = y_0 = 0$.

Если ввести оператор сдвига $By_t = y_{t-1}$, то процесс авторегрессии (5.1) можно записать в виде

$$\Phi(B)y_t = \varepsilon_t,$$

где $\Phi(B) = 1 - a_1 B - a_2 B^2$.

Отсюда следует, что выражение y_t через $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_t$ связано с обращением оператора $\Phi(B)$. В связи с этим квадратичная функция

$$\Phi(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2$$

носит название характеристического полинома и его свойства во многом определяют поведение процесса авторегрессии.

Если корни характеристического полинома лежат вне единичного круга, то модель (5.1) принято называть асимптотически стационарной и неустойчивой - в противном случае (см., например,[3]). Случай, когда корни лежат на единичной окружности $|z| = 1$, мы будем называть критическим.

Традиционные оценки параметров в модели (5.1) или в более общей модели авторегрессии $p-$ го порядка ($AR(p)-$ модели) строятся по методу наименьших квадратов. Эти оценки имеют достаточно сложную структуру и в связи с этим имеют (в критическом случае) предельные распределения, выражающиеся через функционалы от винеровского процесса.

При получении оценок в [4]для AR(1)-модели,как уже отмечалось выше, были использованы уравнения оценивания (см., например, [8]), построенные с помощью рекуррентных связей (2.1), задающих исходный процесс. Аналогичный подход был применён авторами и для AR(2)-модели (см.[9],[10]).

Поскольку оценки параметров в различных случаях строятся по-разному, то мы будем их рассматривать отдельно.

Случай 1: $\Phi(z) = (1-z)^2$, **т.е.**$a_1 = 2,\ a_2 = -1$ **(гипотеза $\mathbf{H}_1$).**

Составим два уравнения оценивания путем суммирования соотношения (5.1) по t сначала от 1 до k, а затем от 1 до n :

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{k} y_t = a_1 \sum\limits_{t=1}^{k} y_{t-1} + a_2 \sum\limits_{t=1}^{k} y_{t-2} + \sum\limits_{t=1}^{k} \varepsilon_t, \\ \sum\limits_{t=1}^{n} y_t = a_1 \sum\limits_{t=1}^{n} y_{t-1} + a_2 \sum\limits_{t=1}^{n} y_{t-2} + \sum\limits_{t=1}^{n} \varepsilon_t \end{cases}$$

или в сокращенном виде

$$\begin{cases} Y_k = a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_{k-2} + E_k, \\ Y_n = a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} + E_n\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

Решая систему уравнений (5.2) без учета E_k и E_n, получим оценки

$$\hat{a}_1 = \frac{Y_k\, Y_{n-2} - Y_n\, Y_{k-2}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}\,, \quad \hat{a}_2 = \frac{Y_{k-1} Y_n - Y_{n-1} Y_k}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}.$$

Теперь из (5.2) найдем отклонения

$$\hat{a}_1 - a_1 = \frac{E_k\, Y_{n-2} - E_n Y_{k-2}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}, \quad \hat{a}_2 - a_2 = \frac{E_n\, Y_{k-1} - E_k Y_{n-1}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}.$$

Т е о р е м а 5.1. *Если* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...-$ *н.о.р.с.в. с* $E(\varepsilon_1) = 0$ *и* $E(\varepsilon_1^2) = 1$, *то при* $n \to \infty$, $k \to \infty$, $k = 0(n)$, *в условиях гипотезы* H_1, *имеем*

$$\frac{k}{\sqrt{3}}(\hat{a}_1 - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \frac{k}{\sqrt{3}}(\hat{a}_2 - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где (ξ_1, ξ_2) – *нормальный случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей* $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

З а м е ч а н и е 5.1. *Предельный функционал в теореме 4.1 имеет вид* $f(x, y) = x/y$ *и он разрывен при* $y = 0$. *Но так как точка разрыва имеет меру нуль относительно двумерного гауссовского распределения или, что то же самое, относительно меры Лебега в* R^2, *то требуемое утверждение вытекает из обобщенной функциональной предельной теоремы (см.*[11] *гл.I, § 5, теорема 5.1).*

Случай 2: $\Phi(z) = (1+z)^2$, **т.е.** $a_1 = -2$, $a_2 = -1$ **(гипотеза** $\mathbf{H}_2$**).**

В рассматриваемом случае, исходя из соотношений

$$y_{2t+1} = a_1 y_{2t} + a_2 y_{2t-1} + \varepsilon_{2t+1}, \tag{5.3}$$

$$y_{2t} = a_1 y_{2t-1} + a_2 y_{2t-2} + \varepsilon_{2t}, \tag{5.4}$$

уравнения оценивания будем строить путем суммирования (5.3) по t от 1 до k, а затем (5.4) от 1 до n. Тогда мы получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{Y}_{2k+1} = a_1 \bar{Y}_{2k} + a_2 \bar{Y}_{2k-1} + \bar{E}_{2k+1}, \\ \bar{Y}_{2n} = a_1 \bar{Y}_{2n-1} + a_2 \bar{Y}_{2n-2} + \bar{E}_{2n}, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $\bar{Y}_{2m+1} = \sum_{t=1}^{m} y_{2t+1}$, $\bar{Y}_{2m} = \sum_{t=1}^{m} y_{2t}$, $\bar{E}_{2m+1} = \sum_{t=1}^{m} \varepsilon_{2t+1}$, $\bar{E}_{2m} = \sum_{t=1}^{m} \varepsilon_{2t}$. Теперь, поступая так же, как и в случае 1, из (5.5) получим

$$\hat{\hat{a}}_1 - a_1 = \left(\bar{E}_{2k+1}\bar{Y}_{2n-2} - \bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2k-1}\right) / \left(\bar{Y}_{2k}\bar{Y}_{2n-2} - \bar{Y}_{2n-1}\bar{Y}_{2k-1}\right), \tag{5.6}$$

$$\hat{\hat{a}}_2 - a_2 = \left(\bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2k} - \bar{E}_{2k+1}\bar{Y}_{2n-1}\right) / \left(\bar{Y}_{2k}\bar{Y}_{2n-2} - \bar{Y}_{2n-1}\bar{Y}_{2k-1}\right). \tag{5.7}$$

Т е о р е м а 5.2. *В тех же предположениях относительно* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...$, *что и в теореме 4.1, в условиях гипотезы* H_2 *имеем при* $k \to \infty$, $n \to \infty$ *и* $k = 0(n)$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}k\left(\hat{\hat{a}}_1 - a_1\right) \Rightarrow -\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}k\left(\hat{\hat{a}}_2 - a_2\right) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где (ξ_1, ξ_2) – *гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей* $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3/8} \\ \sqrt{3/8} & 1 \end{pmatrix}$.

Случай 3: $\Phi(z) = 1 - z^2$, **т.е.** $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ **(гипотеза** $\mathbf{H}_3$**).**

Здесь используем тот же метод построения оценок, что и в случае 2, но при $k = n$. Тогда вместо (5.6) и (5.7) получим

$$a_1^* - a_1 = \frac{\bar{E}_{2n+1}\bar{Y}_{2n-2} - \bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}{\bar{Y}_{2n-2}^2 - \bar{Y}_{2n-1}^2 - y_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}, \quad a_2^* - a_2 = \frac{\bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2n} - \bar{E}_{2n+1}\bar{Y}_{2n-1}}{\bar{Y}_{2n-2}^2 - \bar{Y}_{2n-1}^2 - y_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}.$$

Однако, в рассматриваемом случае (при гипотезе H_3)

$$y_{2k-1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_{2k-1}, \quad y_{2k} = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + ... + \varepsilon_{2k},$$

$$\bar{Y}_{2n-1} = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_3 + ... + \varepsilon_{2n-1},$$

$\bar{Y}_{2n} = n\varepsilon_2 + (n-1)\varepsilon_4 + ... + \varepsilon_{2n}$. После соответствующих нормировок получим при $n \to \infty$

$$\frac{n}{\sqrt{3}}(a_1^* - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \quad \frac{n}{\sqrt{3}}(a_2^* - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \tag{5.8}$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ – гауссовский вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Соотношения (5.8) и дают основное утверждение в рассматриваемом случае ($a_1 = 0$; $a_2 = 1$). Более детальное обоснование осуществляется по аналогии со случаем 1.

Случай 4: $\Phi(z) = 1 + z^2$, т.е. $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ (гипотеза H_4).

В данном случае оценки строятся, исходя из (5.3) и (5.4), которые предварительно умножаются на $(-1)^{t+1}$ и затем суммируются по t от 1 до n.

Обозначим

$$\hat{Y}_{2n-1} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+1}y_{2t-1}, \quad \hat{Y}_{2n} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+1}y_{2t},$$

$$\hat{E}_{2n-1} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+1}\varepsilon_{2t-1}, \quad \hat{E}_{2n} = \sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+1}\varepsilon_{2t}.$$

Тогда отклонения оценок от оцениваемых параметров запишутся так

$$a_1^{**} - a_1 = \frac{\hat{E}_{2n+1}\hat{Y}_{2n-2} - \hat{E}_{2n}\hat{Y}_{2n-1}}{\hat{Y}_{2n-2}^2 - \hat{Y}_{2n-1} + y_{2n}\hat{Y}_{2n-2}}, \quad a_2^{**} - a_2 = \frac{\hat{E}_{2n}\hat{Y}_{2n-2} - \hat{E}_{2n+1}\hat{Y}_{2n-1} + y_{2n}\hat{E}_{2n}}{\hat{Y}_{2n-2} - \hat{Y}_{2n-1} + y_{2n}Y_{2n-2}}.$$

Теперь, учитывая, что в условиях гипотезы H_4

$$\hat{Y}_{2n-1} = n\varepsilon_1 - (n-1)\varepsilon_2 + ... + (-1)^{n+1}\varepsilon_{2n-1}, \quad \hat{Y}_{2n} = n\varepsilon_2 - (n-1)\varepsilon_4 + ... + (-1)^{n+1}\varepsilon_{2n},$$

по аналогии с предыдущим случаем, получим при $n \to \infty$

$$\frac{n}{\sqrt{3}}(a_1^{**} - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \quad \frac{n}{\sqrt{3}}(a_2^{**} - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}.$$

В рассматриваемом случае $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ — гауссовский вектор с нулевым средним и с той же ковариационной матрицей, что и в (5.9). Для сравнения приведем один результат, относящийся к оценке наименьших квадратов $\overset{\vee}{\underset{2}{a}}$ из работы [3]. В предположении, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ образуют мартингал разности с $E\,|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$, имеет место утверждение (при гипотезе H_4)

$$n\left(\overset{\vee}{a}_2 - a_2\right) \Rightarrow \left(2 - w_1^2(1) - w_2^2(1)\right) / \int_0^1 \left(w_1^2(t) + w_2^2(t)\right) dt,$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы.

Список литературы

1. Anderson T.V. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations// Ann. Math. Statist. -1959. -V.30. -P.676-687.

2. White J.S. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case// Ann. Math. Statist. -1958. -V.29. -P.1188-1197.

3. Chan N.H., Wei C.Z. Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregression processes.// Annals of Statistics. -1988. -V.16. -№1. -P.367-401.

4. Startsev A.N. A new approach to estimation of an autoregressive parameter// Proc. of Sixth. USSR-Japan Symp., World Scientific. -1991. -P.377-381.

5. Sandor Baran., Gyula Pap. Asymptotic inference for a one-dimensional simultaneous autoregressive model// Metrika DOI 10.1007/s00184-009-0289-5.

6. Basu.S. and Reinsel.G.C. Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model// Adv. Appl. Probab. -1993. -V.25. -P.631-648.

7. Sandor Baran, Gyula Pap and Martien C.A. Van Zuijlen. Asymptotic inference for an unstable spatial AR model.// Statistics. -2004. -V.38(6). -P.465-482.

8. Durbin J. Estimation of parameters in time-series regression models// JRSS. -1960. -B22. -№1. -P.139-153.

9. Старцев А.Н., Мирзаев Т.С. О новом подходе к оценке параметров процесса двумерной авторегрессии в критическом случае.// Труды международной научно-практической конференции «Казахстан в новом мире и проблемы национального образования» (Жетысай, 16-18 мая, 2008 г.), Шыькент. -2008. -Т. III. -С.234-236.

10. Старцев А.Н., Мирзаев Т.С. О новом подходе к оценке параметров процесса авторегрессии второго порядка в критическом случае// УзМЖ. -2011. -№1. -С.142-152.

11. Биллингсли П.Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

On nonstandard estimation methods in autoregression models in unstable cases.

© **A. N. Startsev**[3], **T. S. Mirzaev**[4]

Abstract. In the report is suggested some estimates of autoregression parameters that are different in comparison of the least squares estimates (LSE). LSE in the unstable (critical) cases, i.e. when the characteristic equation roots are lain on the unit circle, have, as a rule, compound limit distributions. Suggested by us nonstandard estimates in majority cases have more simple limit distributions.

Key Words: the first order simple autoregression, one-dimensional simultaneous autoregression, spatial autoregression of the first order, simple autoregression of the second order, parameter estimates, nonstandard approach, limit distributions.

[3]Professor, Branch of Russia Economic University named G.V.Plekhanov in Tashkent, e-mail: anstartsev@gmail.com.

[4]Minor sc. worker, Institute of Mathematics and Information Technologies, Uzbek Academy of Sciences., Tashkent, e-mail: tsmirzaev@mail.ru.